

Solutions globales pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3

A.Poiret ^a,

^a*Faculté des sciences d'Orsay, Département de mathématiques, Bâtiment 430 Bureau 106, France*

Résumé

Dans cet article, on s'intéresse à l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3. Grâce à une randomisation des données initiales, comme l'on fait N.Burq et N.Tzvetkov, on construit des ensembles de solutions globales pour des données qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, alors que le problème est $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ critique. Le point clef de la démonstration est l'existence d'une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique.

Key words: Estimées bilinéaires de types Bourgain, solutions globales, oscillateur harmonique, données aléatoires, équations de Schrödinger sur-critiques, inégalités de types chaos de Wiener

Remerciement Je tiens à remercier grandement Nicolas Burq sans qui cet article n'aurait jamais vu le jour. Que ce soit pour toutes les idées qu'ils m'aient donné (en particulier la preuve de l'estimée bilinéaire de la section 3 est sienne) ou pour tous ses conseils, je lui en suis grandement reconnaissant.

Email address: aurelien.poiret@math.u-psud.fr (A.Poiret).

Dans cet article, on explique comment construire des solutions globales pour certaines équations de Schrodinger sur-critiques. On considère les équations de Schrödinger suivantes :

$$\begin{cases} i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta \tilde{u} = K|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u} \\ \tilde{u}(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

où $K \in \{-1, 1\}$ et p désigne un entier impair. Alors, on peut trouver dans [Ta1] les théorèmes suivants : il existe un espace X_T^s continûment injecté dans $C^0([-T, T], H^s(\mathbb{R}^d))$ vérifiant les faits suivants :

- Si $p < 1 + \frac{4}{d-2s}$ (cas sous-critique) alors pour tout $R > 0$, il existe $T_R > 0$ tel que si $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq R$, alors il existe une unique solution locale $u \in X_T^s$ à l'équation (NLS). De plus, l'application $u_0 \in B_{H^s}(0, R) \rightarrow u \in X_T^s$ est continue. Cela signifie que le problème est localement bien posé.

Si T peut être choisi égal à ∞ , on dit que le problème est globalement bien posé. C'est le cas par exemple si $s = 0$ ou si $s = 1$ et $K = 1$. De manière générale, si $K = -1$ ou si s est très proche de 0, le problème de globalisation est délicat.

Dans le cas où le problème est globalement bien posé, il est naturel d'étudier le comportement de la solution en $+\infty$.

Par exemple, pour $p = 3$, $d = 3$ et $s = 1$, nous pouvons obtenir pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, l'existence de $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{it\Delta}u_+\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0$. Lorsque cette propriété est vérifiée, on parle de "scattering". Il existe des situations où le problème est globalement bien posé mais où le scattering n'est pas vérifié.

- Si $p = 1 + \frac{4}{d-2s}$ (cas critique), on peut démontrer l'existence locale d'une unique solution pour chaque donnée initiale comme dans le cas sous-critique, mais le temps d'existence de la solution ne dépend pas uniquement de $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ et le problème de globalisation est un problème complexe.

- Si $p > 1 + \frac{4}{d-2s}$ (cas sur-critique), il existe une suite de réels $t_n \in \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $u_n \in H^s(\mathbb{R}^d)$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0$ où $u_n(t, \cdot)$ désigne une solution de l'équation (NLS) avec donnée initiale correspondante. Par conséquent, le flot de l'équation (NLS) n'est pas continue en 0, le problème n'est pas bien posé et les méthodes usuelles ne permettent pas l'étude de l'équation dans cette situation.

Dans la majeure partie de cet article, on s'intéresse au cas $p = 3$, $d = 3$ qui est donc $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ critique et nous allons construire un nombre infini non dénombrable de solutions globales pour des données initiales qui sont moralement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Dans la section 9, on expliquera comment généraliser ce résultat (en dimension supérieure à 2) pour toutes équations de moins d'une demi dérivée sur-critique.

Pour établir ce résultat, on utilise les idées de N.Burq, L.Thomann et N.Tzvetkov développées dans [BT2] et [BTT] en rendant la donnée initiale aléatoire dans l'espoir de

gagner des dérivées dans un certain espace L^p pour $p \neq 2$.

Tout d'abord, en section 4, on vérifie que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas de gagner de dérivées dans L^2 et que le problème reste sur-critique avec le même indice. On prouve également que notre donnée aléatoire est grande dans H^s pour $0 < s \ll 1$. Ainsi, comme le théorème 2 de [CGP], nos solutions construites seront également valables pour des équations sur-critiques avec données initiales grandes.

La preuve du théorème repose essentiellement sur deux résultats intermédiaires :

-la transformation de lentille (utilisée en dimension 1 dans [BTT] et que nous pouvons généraliser en toutes dimensions) qui nous permet de se ramener à prouver un théorème d'existence locale sur $] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ pour l'équation de Schrödinger avec potentiel harmonique (voir section 2.3).

-l'existence d'une estimée bilinéaire pour l'oscillateur harmonique (voir section 3) qui permet de gagner la demi dérivée sur les termes d'ordre 1 en u_0 . Cette estimée est l'analogue de l'estimée bilinéaire pour le Laplacien prouvée par Bourgain (voir [S] pour avoir une preuve).

En sections 5 et 6, par analogie au théorème 1 de [CG1] ou le théorème 2 de [CG2], en utilisant les deux résultats intermédiaires précédents, on peut prouver que si la donnée initiale est assez petite pour une certaine norme alors nous pouvons appliquer un théorème de point fixe et obtenir une solution globale pour l'équation (NLS).

Pour conclure, il suffit de vérifier que la probabilité que la norme de la donnée initiale soit petite n'est pas nulle. En utilisant les méthodes de N.Burq et N.Tzevtkov développées dans les paragraphes 3 et 4 de [BT2], en ayant choisi comme fonctions propres pour l'oscillateur harmonique les fonctions tenseurs pour avoir la meilleure décroissance possible, on peut évaluer la régularité de la donnée initiale (section 7) et prouver le théorème (section 8).

1. Introduction et notations

En dimension d'espace d quelconque, on pose $H = -\Delta + x^2$ l'oscillateur harmonique. On note λ_n^2 les valeurs propres et h_n les fonctions propres de H que l'on indexe par $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$Hh_n = \lambda_n^2 h_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ et $H^s(\mathbb{R}^d)$ les espaces de Sobolev usuels. Puis, on définit les espaces de Sobolev harmoniques.

Définition 1 L'espace $\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est défini comme la fermeture de l'espace de Schwartz pour la norme

$$\|u\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|H^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Définition 2 De manière similaire, l'espace $\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ est défini comme la fermeture de l'espace de Schwartz pour la norme

$$\|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = \|H^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans [DG], nous pouvons trouver la proposition suivante :

Proposition 3 *Pour tout $1 < p < \infty$, $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C} \|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \| \langle x \rangle^s u \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour simplifier les calculs, on suppose $p = 3$ et $d = 3$ dans l'équation (NLS). Néanmoins, les résultats peuvent être obtenus de manière similaire pour $d \geq 2$ car la preuve est basée sur l'estimée bilinéaire que nous démontrons pour $d \geq 2$.

On suppose que les fonctions propres de l'oscillateur harmonique sont données par les fonctions propres tenseurs, c'est à dire

$$h_n(x, y, z) = h_{n_1}(x) h_{n_2}(y) h_{n_3}(z) \quad (1)$$

où $(-\partial_x^2 + x^2)h_{n_1} = \lambda_{n_1}^2 h_{n_1}$, $(-\partial_y^2 + y^2)h_{n_2} = \lambda_{n_2}^2 h_{n_2}$, $(-\partial_z^2 + z^2)h_{n_3} = \lambda_{n_3}^2 h_{n_3}$
et $\lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \lambda_{n_3}^2 = \lambda_n^2$.

Ensuite, supposons donnée (Ω, A, P) un espace de probabilité et $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que $E(|g_n|^2) < \infty$. Soit $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$, c'est à dire

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n h_n(x) \text{ où } \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 < \infty,$$

et considérons l'application $\omega \longrightarrow u_0(\omega, \cdot)$ de (Ω, A) dans $\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ que l'on équipe de sa tribu borélienne, définie par $u_0(\omega, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) h_n(x)$.

On peut vérifier que l'application $\omega \longrightarrow u_0(\omega, \cdot)$ est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3))$ et on définit μ comme la loi de cette variable aléatoire. Il est alors possible d'appliquer le théorème de transfert suivant :

$$P(\omega \in \Omega / \Psi(u_0(\omega, \cdot)) \in A) = \mu(f \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \Psi(u_0) \in A), \quad (2)$$

pour toute application $\Psi : (\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3), \mathcal{B}(\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3))) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Premièrement, supposons que $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes gaussiennes complexes standards (c'est à dire que la densité de g_n est donnée par $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dL$ où dL désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}) alors nous avons les deux théorèmes suivants :

Theorem 4 *Soient $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sigma[$, alors il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant les conditions suivantes :*

- i) $P(\Omega') > 0$.
- ii) *Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale \tilde{u} à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$.*
- iii) *Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta} L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta} L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tous $\sigma' > \sigma$ et $\alpha \in]0, 1]$, il existe deux constantes R et $C > 0$ telles que

- si $u_0 \notin \overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)$ alors $P(\omega \in \Omega/u_0(\omega, \cdot) \in H^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)) = 0$,
- si $u_0 \in \overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)$ avec $\|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \geq R$ alors

$$P(\Omega') \geq (1 - \alpha) \times e^{-C \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{6}{\sigma' - \sigma}} \log \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}.$$

Theorem 5 Si $\frac{1}{2} > \sigma > 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu \left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \text{on ait existence globale et scattering} \mid \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 1. \quad (3)$$

De plus, si $(u_0^1, u_0^2) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) \times \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \left((u_0^1, u_0^2) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) \times \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \tilde{u}_1 \text{ et } \tilde{u}_2 \text{ sont globales avec } \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{X^0} \leq \epsilon \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta, \|u_0^2\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 1, \quad (4)$$

où μ_i correspond à la loi de la variable aléatoire $\omega \rightarrow u_0^i(\omega, \cdot)$.

Deuxièmement, on suppose que $g_n = \epsilon * b_n$ où $(b_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires Bernoulli standards (l'espérance est nulle) et $\epsilon > 0$ alors nous avons le théorème suivant :

Theorem 6 Soient $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sigma[$ alors pour tout $\alpha \in]0, 1]$ il existe une constante $\epsilon > 0$ et un ensemble $\Omega_{\epsilon, \alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $P(\Omega_{\epsilon, \alpha}) \geq 1 - \alpha$.
- ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon, \alpha}$, il existe une unique solution globale \tilde{u} à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$.
- iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon, \alpha}$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta} L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta} L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on a la relation $\alpha = C_1 e^{-\frac{C_2}{\epsilon^2 \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}}$ et si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ alors

$$P(\omega \in \Omega/u_0(\omega, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^3)) = 0.$$

2. Résultats préliminaires

Dans cette section, excepté dans la quatrième partie, on suppose la dimension d'espace d quelconque.

2.1. Les estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique

Dans ce premier paragraphe, on établit les estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique.

Définition 7 Soient $(q, r) \in [2, \infty]^2$ alors on dit que (q, r) est admissible si et seulement si

$$(q, r, d) \neq (2, \infty, 2) \quad \text{et} \quad \frac{2}{q} = \frac{d}{2} - \frac{d}{r}.$$

Définition 8 Pour $s \in \mathbb{R}$ et $T \geq 0$, on définit

$$\overline{X}_T^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q([-T, T], \overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Proposition 9 Pour tout temps $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toute fonction $u \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\|e^{-itH}u\|_{\overline{X}_T^s} \leq C_T \|u\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. Quitte à remplacer u par $e^{iT H}u$, il suffit de prouver l'estimation pour un certain $T > 0$, par exemple pour $T = \frac{\pi}{4}$. De même, quitte à remplacer u par $H^{\frac{s}{2}}u$, on peut limiter la preuve au cas où $s = 0$.

On a

$$e^{-itH}u(t, x) = \left(\frac{1}{\cos 2t}\right)^{d/2} \times e^{it\Delta}u\left(\frac{1}{2}\tan 2t, \frac{x}{\cos 2t}\right) \times e^{-\frac{ix^2 \tan 2t}{2}}.$$

Ainsi, si le couple (q, r) est admissible, on obtient

$$\begin{aligned} & \|e^{-itH}u\|_{L^q([- \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], L^r(\mathbb{R}^d))} \\ &= \left\| \left(\frac{1}{\cos 2t}\right)^{d/2} \times e^{it\Delta}u\left(\frac{1}{2}\tan 2t, \frac{x}{\cos 2t}\right) \times e^{-\frac{ix^2 \tan 2t}{2}} \right\|_{L^q([- \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], L^r(\mathbb{R}^d))} \\ &= \|e^{it\Delta}u\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons utiliser les estimées de Strichartz pour le laplacien pour conclure. \square

Proposition 10 Pour tout temps $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout couple (q, r) admissible, réel s et fonction $F \in L^{q'}([T, T], \overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))$,

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} F(s) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \leq C \|F\|_{L^{q'}([-T, T], \overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Preuve. Il s'agit de la même preuve que celle des estimées de Strichartz pour le laplacien que l'on peut trouver dans [Ta1]. En utilisant la proposition 9, par dualité, on obtient

$$\left\| \int_{-T}^T e^{isH} F(s) \right\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \|F\|_{L^{q'}([-T, T], \overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Et finalement, on établit que

$$\left\| \int_{-T}^T e^{-i(t-s)H} F(s) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \leq C \|F\|_{L^{q'}([-T, T], \overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))},$$

puis nous pouvons conclure en utilisant le lemme de Christ-Kiselev. \square

2.2. Quelques propriétés des espaces de Bourgain

Dans ce second paragraphe, on définit les espaces de Bourgain puis on établit leurs différentes propriétés.

Définition 11 On définit l'espace $\overline{X}^{s,b} = \overline{X}^{s,b}(\mathbb{R} * \mathbb{R}^d)$ comme le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R} * \mathbb{R}^d)$ pour la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \| \langle t + \lambda_n^2 \rangle^b \lambda_n^s \widehat{P_n u}(t) \|_{L_t^2(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \| H^{s/2} e^{itH} P_n u(t, \cdot) \|_{L_x^2(\mathbb{R}^d, H_t^b(\mathbb{R}))}^2, \end{aligned}$$

où $\widehat{P_n u}(t)$ désigne la transformée de Fourier de $P_n u := \langle u, h_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)} * h_n$ par rapport à la variable temps.

Remarque : Au vu de cette définition, il est important de noter que

$$\| H^{s/2} e^{itH} u(t, \cdot) \|_{L_x^2(\mathbb{R}^d, H_t^b(\mathbb{R}))} \leq \|u\|_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Dans [Ta1], corollaire 2.10, nous pouvons trouver la proposition suivante :

Proposition 12 Pour tout temps $T \geq 0$ et entier $b > \frac{1}{2}$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout entier $s \in \mathbb{R}$ et pour tout couple admissible (q, r) , si $u \in \overline{X}^{s,b}$ alors $u \in L^q([-T, T], \overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d))$ et

$$\|u\|_{L^q([-T, T], \overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d))} \leq C_T \|u\|_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Dans les propositions 13 et 14, quitte à remplacer u par $H^{s/2}u$, nous pouvons limiter la preuve au cas $s = 0$.

Grâce au lemme 2.4 de [BGT2], nous pouvons établir la proposition suivante :

Proposition 13 Pour tout $\theta \in [0, 1]$, si $b > \frac{1-\theta}{2}$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier s et toute fonction $u \in \overline{X}^{s,b}$,

$$\|u\|_{L^{\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u\|_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Preuve. À l'aide de la transformée de Fourier inverse, on a

$$P_n u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \tau + \lambda_n^2 \rangle^b}{\langle \tau + \lambda_n^2 \rangle^{>b}} \times e^{it\tau} \times \widehat{P_n u}(\tau) d\tau.$$

Puis, pour $b > \frac{1}{2}$, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|P_n u(t)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau + \lambda_n^2 \rangle^{2b} |\widehat{P_n u}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Ainsi, en élevant au carré, en intégrant sur \mathbb{R}^d puis en sommant pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient pour tout réel $b > \frac{1}{2}$ et fonction $u \in \overline{X}^{0,b}$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u\|_{\overline{X}^{0,b}}.$$

Mais, par définition,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} = \|u\|_{\overline{X}^{0,0}}$$

donc le résultat suit par interpolation. \square

Proposition 14 *Pour toute constante $1 > \delta > 0$, il existe deux constantes $b' < \frac{1}{2}$ et $C > 0$ telles que pour tout entier $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $u \in L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))$,*

$$\|u\|_{\overline{X}^{s, -b'}} \leq C \|u\|_{L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))}.$$

Proof. D'après la proposition 13, on a par dualité que pour tout $\theta \in [0, 1]$ et $b > \frac{1-\theta}{2}$, il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in L^{\frac{2}{2-\theta}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$

$$\|u\|_{\overline{X}^{0, -b}} \leq C \|u\|_{L^{\frac{2}{2-\theta}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

Puis on choisit $\theta = \frac{2\delta}{1+\delta}$ et $b = \frac{1-\theta+\delta}{2} < \frac{1}{2}$ pour obtenir la proposition. \square

Dans [Ta1], lemme 2.11, nous pouvons trouver la proposition suivante :

Proposition 15 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $b \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $u \in \overline{X}^{s, b}$,*

$$\|\psi(t)u\|_{\overline{X}^{s, b}} \leq C \|u\|_{\overline{X}^{s, b}}$$

Enfin, on donne une dernière proposition dont la preuve peut être trouvée au lemme 3.2 de [G] (en prenant $b' = 1 - b$ et $T = 1$).

Proposition 16 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $1 \geq b > \frac{1}{2}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $F \in \overline{X}^{s, b-1}$,*

$$\left\| \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} F(s) ds \right\|_{\overline{X}^{s, b}} \leq C \|F\|_{\overline{X}^{s, b-1}}.$$

À partir de maintenant, on pose $T = \frac{\pi}{4}$, puis on définit le nouvel espace de Bourgain qui va nous intéresser.

Définition 17 *On définit l'espace $\overline{X}_T^{s, b} = \overline{X}^{s, b}([-T; T] * \mathbb{R}^d)$ comme le sous ensemble de $\overline{X}^{s, b}$ pour lequel la norme suivante*

$$\|u\|_{\overline{X}_T^{s, b}} = \inf_{w \in \overline{X}^{s, b}} \left\{ \|w\|_{\overline{X}^{s, b}} \text{ avec } w|_{[-T, T]} = u \right\}$$

est finie.

La proposition 13 nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 18 *Soient $b > \frac{1}{2}$ et $s \in \mathbb{R}$ alors $\overline{X}_T^{s, b} \hookrightarrow C^0([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))$.*

2.3. La transformation de Lentille

Dans ce troisième paragraphe, on définit la transformation de lentille puis on établit ses propriétés fondamentales.

Définition 19 *Pour $u(t, x)$ une fonction mesurable de $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\times \mathbb{R}^d$, on définit pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $\tilde{u}(t, x)$ de la façon suivante :*

$$\tilde{u}(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2} \times u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}}.$$

Dans [Ta2], on peut trouver la proposition suivante :

Proposition 20 *Soit $K \in \mathbb{R}$ alors,*

$$u \text{ est solution de } i \frac{\partial u}{\partial t} - Hu = K \cos(2t)^{\frac{d}{2}(p-1)-2} |u|^{p-1} u$$

$$\text{si et seulement si } \tilde{u} \text{ est solution de } i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta \tilde{u} = K |\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u}.$$

Définition 21 Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit

$$X^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q(\mathbb{R}, W^{s,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Proposition 22 Soit $s \geq 0$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} - \frac{d}{2} \leq 0$, on a pour toute fonction $u \in L^p([-T, T], \overline{W}^{s,q}(\mathbb{R}^d))$,

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}, W^{s,q}(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u\|_{L^p([-T, T], \overline{W}^{s,q}(\mathbb{R}^d))}.$$

Preuve. Par interpolation, il suffit de prouver le résultat pour $s = n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq n$, alors grâce à la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} & \partial_x^\alpha \tilde{u}(t, x) \\ &= \partial_x^\alpha \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2} \times u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2} \times \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_x^\beta \left(u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \right) \times \partial_x^{\alpha-\beta} \left(e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}} \right). \end{aligned}$$

Puis, comme

$$|\partial_x^{\alpha-\beta} (e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}})| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right|^{|\alpha-\beta|} \right),$$

on établit

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \tilde{u}(t, x)| &\leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2+|\beta|} \\ &\quad \times |\partial_x^\beta u| \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times \left(1 + \left| \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right|^{|\alpha-\beta|} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|\partial_x^\alpha \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2+d/q+|\beta|} \times u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \cdot \right) \right\|_{\overline{W}^{|\alpha|,q}(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2t}} \right)^{d/2+d/q-2/p+|\beta|} \times u(t, x) \right\|_{L^p([-T, T], \overline{W}^{|\alpha|,q}(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\frac{d}{2} + \frac{d}{q} - \frac{2}{p} + |\beta| \geq 0$ pour $\beta \in \mathbb{N}^d$. \square

Finalement, on a établi la proposition suivante :

Proposition 23 Soient $s \geq 0$ et $u \in \overline{X}_T^s$ alors $\tilde{u} \in X^s$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{X}_T^s$,

$$\|\tilde{u}\|_{X^s} \leq C \|u\|_{\overline{X}_T^s}.$$

Et enfin, grâce à la proposition 12, on obtient la proposition suivante :

Proposition 24 Soient $b > \frac{1}{2}$, $s \geq 0$ et $u \in \overline{X}_T^{s,b}$ alors $\tilde{u} \in X^s$ et il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{X}_T^{s,b}$,

$$\|\tilde{u}\|_{X^s} \leq c \|u\|_{\overline{X}_T^{s,b}}.$$

2.4. Propriétés basiques des fonctions propres de l'oscillateur harmonique

Dans ce quatrième paragraphe, on donne quelques estimations classiques des fonctions propres tenseurs de l'oscillateur harmonique.

Proposition 25 Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}^3$,

$$\|h_n\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq C \lambda_n^{-1/4} (\log \lambda_n)^3, \quad (5)$$

$$\|h_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \lambda_n^{-1/6}, \quad (6)$$

$$\|h_n h_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-1/2+\delta}, \quad (7)$$

$$\|h_n h_m h_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{-1/2+\delta}. \quad (8)$$

Preuve. Les estimations (5) et (6) sont très connues en dimension 1 (voir [KT] pour une démonstration).

Dans ce cadre en dimension 3, comme $\lambda_n^2 = \lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \lambda_{n_3}^2$ alors il existe $i \in (1, 2, 3)$ tel que $\lambda_{n_i}^2 \geq \frac{\lambda_n^2}{3}$.

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} &= \|h_{n_1}\|_{L_x^4(\mathbb{R})} \|h_{n_2}\|_{L_y^4(\mathbb{R})} \|h_{n_3}\|_{L_z^4(\mathbb{R})} \\ &\leq C \lambda_{n_1}^{-1/4} \lambda_{n_2}^{-1/4} \lambda_{n_3}^{-1/4} \log(\lambda_{n_1}) \log(\lambda_{n_2}) \log(\lambda_{n_3}) \\ &\leq C \lambda_n^{-1/4} (\log \lambda_n)^3, \end{aligned}$$

car $\lambda_{n_1} \leq \lambda_n$, $\lambda_{n_2} \leq \lambda_n$ et $\lambda_{n_3} \leq \lambda_n$.

Nous pouvons faire la même preuve pour l'estimation (6).

Ensuite, l'estimation (7) est démontrée en dimension 1 dans [BTT].

On peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m) = \lambda_n$ et $\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}) = \lambda_{n_1}$, alors

$\lambda_{n_1}^2 \geq \frac{\lambda_n^2}{3} \geq \frac{\lambda_m^2}{3} \geq \frac{\lambda_{m_1}^2}{3}$. Puis, grâce à (5), on obtient

$$\begin{aligned} \|h_n h_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \|h_{n_1} h_{m_1}\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \|h_{n_2} h_{m_2}\|_{L_y^2(\mathbb{R})} \|h_{n_3} h_{m_3}\|_{L_z^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|h_{n_1} h_{m_1}\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \|h_{n_2}\|_{L_y^4(\mathbb{R})} \|h_{m_2}\|_{L_y^4(\mathbb{R})} \|h_{n_3}\|_{L_z^4(\mathbb{R})} \|h_{m_3}\|_{L_z^4(\mathbb{R})} \\ &\leq C_\delta \lambda_{n_1}^{-1/2+\delta} \\ &\leq C_\delta \lambda_n^{-1/2+\delta}. \end{aligned}$$

Pour l'estimation (8), supposons que $\max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k) = \lambda_n$. Alors, en utilisant (6) et (7), on trouve

$$\begin{aligned} \|h_n h_m h_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|h_n h_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|h_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C_\delta \lambda_n^{-1/2+\delta} \\ &\leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{-1/2+\delta}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. \square

Lemma 26 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions $f, g, h \in \overline{H}^s(\mathbb{R})$,*

$$\|f(x)g(y)h(z)\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \times (\|f\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}).$$

Preuve. Il suffit d'établir le résultat dans le cas où $f(x) = h_n(x)$, $g(y) = h_m(y)$, $h(z) = h_k(z)$.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} & \|f(x)g(y)h(z)\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \\ &= \|H^{s/2}[f(x)g(y)h(z)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \|(\lambda_n^2 + \lambda_m^2 + \lambda_k^2)^{s/2}[h_n(x)h_m(y)h_k(z)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \lambda_n^s \|h_n(x)h_m(y)h_k(z)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \lambda_m^s \|h_n(x)h_m(y)h_k(z)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \lambda_k^s \|h_n(x)h_m(y)h_k(z)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|h_n\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}\|h_m\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h_k\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h_m\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}\|h_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h_m\|_{L^2(\mathbb{R})}\|h_k\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 27 *Pour tout $\delta > 0$ et $s \in [0, 1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}^3$,*

$$\begin{aligned} \|h_n h_m\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{s-1/2+\delta}, \\ \|h_n h_m h_k\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{s-1/2+\delta}. \end{aligned}$$

Preuve. Grâce à (7) et (8), par interpolation, il suffit d'établir les inégalités pour $s = 1$. Pour la première inégalité, on peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m) = \lambda_n$ et $\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}) = \lambda_{n_1}$.

En utilisant le lemme 26, (5) et le lemme A.8 de [BTT] avec $\theta = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} \|h_n h_m\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times (\|h_{n_1} h_{m_1}\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R})} + \|h_{n_2} h_{m_2}\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R})} + \|h_{n_3} h_{m_3}\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R})}) \\ &\leq C \times (\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{m_1})^{1/2+\delta} + \max(\lambda_{n_2}, \lambda_{m_2})^{1/2+\delta} + \max(\lambda_{n_3}, \lambda_{m_3})^{1/2+\delta}) \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{1/2+\delta}. \end{aligned}$$

Pour la seconde inégalité, on peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k) = \lambda_n$ alors, grâce à l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned} \|h_n h_m h_k\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)} &\leq \|h_n h_m\|_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)}\|h_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|h_n h_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|h_k\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{1/2+\delta} \lambda_k^{-1/6} + C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-1/2+\delta} \lambda_k^{5/6} \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{1/2+\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 28 *Soient $\delta > 0$, $l \geq 4$ et $N \geq 1$, alors il existe une constante $C_N > 0$ telle que si on suppose*

$$\lambda_{n_1} \geq \lambda_{n_2}^{1+\delta} \text{ et } \lambda_{n_2} \geq \lambda_{n_3} \geq \dots \geq \lambda_{n_l}, \text{ cela implique que } \left| \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^l h_{n_i}(x) dx \right| \leq C_N \lambda_{n_1}^{-N}.$$

Preuve. En utilisant (5) et (6), on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^l h_{n_i}(x) dx \right| &\leq \lambda_{n_1}^{-2k} \times \|H^k(\prod_{i=2}^l h_{n_i})h_{n_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \lambda_{n_1}^{-2k} \times \left\| \prod_{i=2}^l h_{n_i} \right\|_{H^{2k}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C_k \times \lambda_{n_1}^{-2k} \lambda_{n_2}^{2k} \times \prod_{i=2}^l \|h_{n_i}\|_{L^{2(l-1)}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C_k \times \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} \right)^{2k} \\
&\leq C_k \times \lambda_{n_1}^{\frac{-k\delta}{1+\delta}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad \square
\end{aligned}$$

Soit $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\eta(0) = \eta(1) = 1$ et $\eta(2) = 0$, alors on définit pour $N = 2^k$ la suite d'opérateurs suivante :

$$\Delta_N(u) = \begin{cases} (\eta(\frac{H}{N^2}) - \eta(\frac{4H}{N^2}))u & \text{pour } N \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si $\lambda_n \notin [\frac{N}{2}, 2N]$ alors $\Delta_N(h_n) = 0$ et que $\sum_N \Delta_N(u) = u$.

Lemma 29 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $\delta > 0$ et $K \geq 1$, on ait l'existence d'une constante $C_K > 0$ telle que si on suppose $N_1 \geq N_2^{1+\delta}$ et $N_2 \geq N_3 \geq N_4$ alors pour tous $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \overline{X}^{0,b'}$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1) \Delta_{N_2}(u_2) \Delta_{N_3}(u_3) \Delta_{N_4}(u_4) \right| \leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^4 \|\Delta_{N_i}(u_i)\|_{\overline{X}^{0,b'}}.$$

Preuve. On commence par étudier le cas où $u_i(t, x) = c_i(t)h_{n_i}(x)$. D'après les propositions 28 et 13, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1) \Delta_{N_2}(u_2) \Delta_{N_3}(u_3) \Delta_{N_4}(u_4) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^4 \phi\left(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}\right) c_i(t) h_{n_i}(x) dt dx \right| \\
&\leq \prod_{i=1}^4 \phi\left(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}\right) \times \int_{\mathbb{R}} |c_1(t) \dots c_4(t)| dt \times \left| \int_{\mathbb{R}^3} h_{n_1}(x) \dots h_{n_4}(x) dx \right| \\
&\leq C_K N_1^{-K} \times \prod_{i=1}^4 \phi\left(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}\right) \times \prod_{i=1}^4 \|c_i(\cdot)\|_{L_t^4(\mathbb{R})} \\
&\leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^4 \|\Delta_{N_i}(u_i)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^4 \|\Delta_{N_i}(u_i)\|_{\overline{X}^{0,b'}}.
\end{aligned}$$

Pour le cas général, on pose $u_i(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{i,k}(t) h_k(x)$, alors

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^* \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1) \Delta_{N_2}(u_2) \Delta_{N_3}(u_3) \Delta_{N_4}(u_4) \right| \\
& \leq \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \left| \int_{\mathbb{R}^* \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(c_{1,k_1} h_{k_1}) \Delta_{N_2}(c_{2,k_2} h_{k_2}) \Delta_{N_3}(c_{3,k_3} h_{k_3}) \Delta_{N_4}(c_{4,k_4} h_{k_4}) \right| \\
& \leq C_K N_1^{-K} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \prod_{i=1}^4 \|\Delta_{N_i}(c_{i,k_i} h_{k_i})\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\
& \leq C_K N_1^{-K+12} \sqrt{\sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \prod_{i=1}^4 \|\Delta_{N_i}(c_{i,k_i} h_{k_i})\|_{\overline{X}^{0,b'}}^2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k_i} \|\Delta_{N_i}(c_{i,k_i} h_{k_i})\|_{\overline{X}^{0,b'}}^2 &= \sum_{k_i} \sum_n \|\langle \tau + \lambda_n \rangle^{b'} P_n(\widehat{c_{i,k_i} h_{k_i}})\|_{L_t^2(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\
&= \sum_n \|\langle \tau + \lambda_n \rangle^{b'} P_n(\widehat{c_{i,n} h_n})\|_{L_\tau^2(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\
&= \|u_i\|_{\overline{X}^{0,b'}}^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 30 *Pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_1 \lambda_n^s \leq \|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_2 \lambda_n^s.$$

Preuve. En utilisant la proposition 3, on a

$$\begin{aligned}
C' (\|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\langle x \rangle^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) &\leq \lambda_n^s = \|h_n\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C (\|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\langle x \rangle^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}),
\end{aligned}$$

puis

$$C' \|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda_n^s \leq C (\|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla^s(\hat{h}_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}).$$

Mais comme les fonctions propres sont les fonctions tenseurs alors $|h_n(x)| = |\hat{h}_n(x)|$, car cette égalité est vraie en dimension 1, et le résultat suit. \square

3. L'estimée bilinéaire pour l'oscillateur harmonique

L'objectif de cette section est d'établir une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique. On suppose la dimension d'espace $d \geq 2$ et on propose de prouver le théorème suivant :

Theorem 31 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous N, M, u et v ,*

$$\begin{aligned}
& \|e^{itH} \Delta_N(v) e^{itH} \Delta_M(u)\|_{L^2([-1;1], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

On remarque que pour prouver le théorème 31, il suffit de prouver le théorème suivant :
Theorem 32 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v ,*

$$\begin{aligned} & \|e^{itH} \Delta_N(v) e^{itH} \Delta_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En effet, on peut remplacer u par $e^{i\epsilon H} u$ et v par $e^{i\epsilon H} v$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|e^{i(t+\epsilon)H} \Delta_N(v) e^{i(t+\epsilon)H} \Delta_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Puis, on utilise le changement de variable $t \longleftrightarrow t + \epsilon$ et le théorème (32) pour trouver que

$$\begin{aligned} & \|e^{itH} \Delta_N(v) e^{itH} \Delta_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; 2\epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On peut ainsi itérer le procédé $2E(\frac{1}{\epsilon})$ fois pour établir le théorème 31 et on cherche donc à montrer le théorème 32.

Soit $r \ll 1$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [1/2; 2], \\ 0 & \text{pour } x \in [0, 1/2 - r] \cup [2 + r, \infty[, \end{cases}$$

et posons $\Delta'_N = \phi(\frac{H}{N^2})$. Alors en utilisant que $\phi(x) * (\eta(x) - \eta(4x)) = \eta(x) - \eta(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la proposition suivante :

Proposition 33 *Pour tout N , on a*

$$\Delta'_N \circ \Delta_N = \Delta_N.$$

Par conséquent, pour prouver le théorème 32, il suffit de montrer le théorème suivant :

Theorem 34 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v ,*

$$\begin{aligned} & \|e^{itH} \Delta'_N(v) e^{itH} \Delta'_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En effet, si le théorème 34 est vérifié, nous pouvons appliquer cette inégalité à v remplacé par $\Delta_N(v)$ et u remplacé par $\Delta_M(u)$ puis nous pouvons utiliser la proposition 33 pour obtenir le théorème 32.

Cas $M \sim N$ avec $M \geq N$:

Pour $d = 2$, nous pouvons utiliser les inégalités de Strichartz (soit le théorème 9) pour trouver que

$$\begin{aligned}
& \|e^{itH} \Delta'_N(v) e^{itH} \Delta'_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^4([- \epsilon; \epsilon], L^4(\mathbb{R}^d))} \times \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^4([- \epsilon; \epsilon], L^4(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^4([- \pi; \pi], L^4(\mathbb{R}^d))} \times \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^4([- \pi; \pi], L^4(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq C \|\Delta'_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta'_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Pour $d \geq 3$, en utilisant encore le théorème 9 et les injections de Sobolev, on établit que

$$\begin{aligned}
& \|e^{itH} \Delta'_N(v) e^{itH} \Delta'_M(u)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^\infty([- \epsilon; \epsilon], L^d(\mathbb{R}^d))} \times \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^\infty([- \pi; \pi], \overline{W}^{\frac{d-2}{2}, 2}(\mathbb{R}^d))} \|e^{itH} \Delta'_N(v)\|_{L^2([- \pi; \pi], L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq C \|\Delta'_N(v)\|_{\overline{H}^{\frac{d-2}{2}}(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta'_N(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq C N^{\frac{d-2}{2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Finalement, si nous posons $u_M = \Delta'_M(u)$ et $v_N = \Delta'_N(v)$, on se ramène à démontrer que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v , si $M > 10N$ alors

$$\|e^{itH} v_N e^{itH} u_M\|_{L^2([- \epsilon; \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C N^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{N}{M} \right)^{1/2-\delta} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (9)$$

Pour démontrer ce dernier résultat, on commence par donner quelques notions élémentaires sur les opérateurs pseudo-différentiels.

3.1. Outils sur les opérateurs pseudo-différentiels et applications aux fonctions propres

Définition 35 Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit T^m comme l'espace vectoriel des symboles $q(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifient pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'existence d'une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |\xi|)^{m-\beta}.$$

Définition 36 Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit S^m comme l'espace vectoriel des symboles $q(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifient pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'existence d'une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-\beta}.$$

Définition 37 Pour $q \in S^m \cup T^m$ et $h > 0$, on pose $Op_h(q)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}
Op_h(q)f(x) &= (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi/h} q(x, \xi) f(y) dy d\xi \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{ix\xi} q(x, h\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Dans [M], on peut alors trouver les deux théorèmes suivants :

Theorem 38 Soient $q_1 \in S^{m_1}$ (respectivement T^{m_1}) et $q_2 \in S^{m_2}$ (respectivement T^{m_2}) alors il existe un symbole $q \in S^{m_1+m_2}$ (respectivement $T^{m_1+m_2}$) tel que

$$Op_h(q_1) \circ Op_h(q_2) = Op_h(q)$$

avec

$$q = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha q_1 \partial_x^\alpha q_2 + h^{N+1} r_N \text{ où } r_N \in S^{m_1+m_2-(N+1)} \text{ (respectivement } T^{m_1+m_2-(N+1)}).$$

Theorem 39 Si $q(x, \xi) \in S^0$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\|Op_h(q(x, \xi))u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

On énonce ensuite la propriété suivante qui va permettre d'inverser l'oscillateur harmonique modulo un terme de reste très régularisant.

Proposition 40 Soit $\delta > 0$ et définissons la fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 + \delta, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1 + 2\delta. \end{cases}$$

Posons $p(x, \xi) = \xi^2 + x^2 - 1$ et définissons $H_h = Op_h(p) \in Op_h(T^2)$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe deux opérateurs pseudo-différentiels $E_N \in Op_h(T^{-2})$ et $R_N \in Op_h(T^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ H_h = \eta + h^{N+1} R_N.$$

Preuve. On pose

$$e_0 = \frac{\eta}{p} \in T^{-2}.$$

et pour $n \geq 1$, on définit e_n par récurrence de la façon suivante :

$$e_n = -\frac{1}{p} \sum_{|\alpha|+j=n, j \neq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p \in T^{-2-n}.$$

Enfin, on pose

$$E_N = Op_h \left(\sum_{0 \leq j \leq N} h^j e_j \right).$$

Alors, par la proposition 38,

$$\begin{aligned} E_N \circ H_h &= Op_h \left(\sum_{0 \leq j \leq N} h^j e_j \right) \circ Op_h(p) \\ &= Op_h \left(\sum_{|\alpha|+j \leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p + h^{N+1} r_N \right) \\ &= Op_h \left(\sum_{|\alpha|+j \leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p \right) + h^{N+1} R_N \end{aligned}$$

avec $R_N = Op_h(r_N) \in Op_h(T^{-(N+1)})$.

Or

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|+j \leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p &= e_0 p + \sum_{1 \leq l \leq N} \sum_{|\alpha|+j=l} \frac{h^l}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p \\ &= \eta + \sum_{1 \leq l \leq N} h^l \left(\sum_{|\alpha|+j=l, j \neq l} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p + e_l \cdot p \right) \\ &= \eta. \end{aligned}$$

□

On peut donc maintenant établir une propriété fondamentale que vérifient les fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

Proposition 41 *Pour tous entiers K et N , pour $c > 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\| \langle x \rangle^K h_n \|_{L^p(|x| \geq c\lambda_n)} \leq C \lambda_n^{-N}.$$

Preuve. Comme $(-\Delta + x^2 - \lambda_n^2)h_n = 0$, en posant $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$ et $\Phi(x) = h_n(\lambda_n x)$ alors $(-h^2 \Delta + x^2 - 1)\Phi = 0$.

Soient $\delta \ll 1$ et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1 + \delta, \end{cases}$$

et $\bar{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\bar{\chi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 + 2\delta, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1 + 3\delta. \end{cases}$$

Alors

$$H_h(\chi\Phi) = -h^2 \Delta \chi \Phi - 2h^2 \nabla \chi \cdot \nabla \Phi.$$

Puis, grâce à la proposition 40, on trouve

$$\eta \chi \Phi = -E_N(h^2 \Delta \chi \Phi + 2h^2 \nabla \chi \cdot \nabla \Phi) - h^{N+1} R_N(\chi \Phi).$$

Et finalement,

$$\langle x \rangle^K \bar{\chi} \eta \chi \Phi = - \langle x \rangle^K \bar{\chi} E_N(h^2 \Delta \chi \Phi + 2h^2 \nabla \chi \cdot \nabla \Phi) - h^{N+1} \langle x \rangle^K \bar{\chi} R_N(\chi \Phi).$$

Estimation de $\langle x \rangle^K \bar{\chi} E_N(\Delta \chi \Phi)$:

On a

$$\bar{\chi}(x)(E_N \Delta \chi \Phi)(x) = \frac{\bar{\chi}(x)}{(2\pi h)^d} \int_{\xi, 1 \leq |y| \leq 1+\delta} e^{i(x-y)\xi/h} E_N(x, \xi)(\Delta \chi \Phi)(y) dy d\xi.$$

Comme $|x| > 1 + 2\delta$ alors $|x - y| > \delta$.

Puis comme $\int_{|x-y|>\delta} \leq \int_{|x_1-y_1|>\delta} + \int_{|x_2-y_2|>\delta} + \dots + \int_{|x_d-y_d|>\delta}$, on peut se ramener à

traiter le terme où $|x_1 - y_1| > \delta$.

De $\frac{h^M}{(i(x_1 - y_1))^M} \partial_{\xi_1}^M e^{i(x-y)\xi/h} = e^{i(x-y)\xi/h}$ et d'une intégration par parties, on déduit

$$\begin{aligned} & \langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) (E_N \Delta \chi \Phi)(x) \\ &= \frac{\bar{\chi}(x)}{(2\pi h)^d} \times \int_{\xi, 1 \leq |y| \leq 1+\delta} \frac{h^M}{i^M (x_1 - y_1)^M} e^{i(x-y)\xi/h} \langle x \rangle^K \partial_{\xi_1}^M E_N(x, \xi) (\Delta \chi \Phi)(y) dy d\xi. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $E_N \in T^{-2}$, on trouve

$$|\langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) (E_N \Delta \chi \Phi)(x)| \leq C \times h^{M-d} \times |\bar{\chi}(x)| \times \int_{\xi, 1 \leq |y| \leq 1+\delta} \frac{|(\Delta \chi \Phi)(y)|}{(1 + |x| + |\xi|)^{2+M-K}} d\xi dy.$$

On peut ensuite supposer que $2 + M - K > 2d$ (ce qui est possible puisque dans le cas où $2 + M - K \leq 2d$, on refait le même calcul avec $M' > M$ vérifiant $2 + M' - K > 2d$ puis il suffira de majorer $h^{M'}$ par h^M) pour obtenir

$$|\langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) (E_N \Delta \chi \Phi)(x)| \leq C \times h^{M-d} \times \|\Delta \chi \Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \frac{|\bar{\chi}(x)|}{(1 + |x|)^{2+M-K-d}}.$$

Et finalement, pour tous entiers M et K , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$,

$$\|\langle x \rangle^K \bar{\chi} E_N (\Delta \chi \Phi)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \times h^{M-d} \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Estimation de $\langle x \rangle^K \bar{\chi} E_N (\nabla \chi \cdot \nabla \Phi)$:

Comme Φ satisfait $-h^2 \Delta \Phi + x^2 \Phi = \Phi$ alors $h \|\nabla \Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ puis nous pouvons procéder comme pour le premier terme pour obtenir le même genre d'estimation.

Estimation de $h^{N+1} \langle x \rangle^K \bar{\chi} R_N (\chi \Phi)$:

On a

$$\begin{aligned} & h^{N+1} \langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) R_N (\chi \Phi)(x) \\ &= h^{N+1} \times \frac{1}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} \langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) r_N(x, h\xi) \mathcal{F}(\chi \Phi)(\xi) d\xi \end{aligned}$$

avec

$$\langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) r_N(x, \xi) \in T^{-N-1+K} \subset T^0 \subset S^0 \text{ pour } N \geq K - 1.$$

En utilisant le théorème 39 et les injections de Sobolev, on trouve donc

$$\begin{aligned} & \|h^{N+1} \langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) R_N (\chi \Phi)(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|h^{N+1} \langle x \rangle^K \bar{\chi}(x) R_N (\chi \Phi)(x)\|_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \times h^{N+1} \times \|\chi \Phi\|_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \times h^{N+1} \times \|\Phi\|_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour tous entiers K et N , pour tout $p \in [1, \infty[$ et $c > 1$, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leq 1$, on ait

$$\|\langle x \rangle^K \Phi\|_{L^p(|x| \geq c)} \leq C \times h^N \times \|\Phi\|_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Puis, en retournant à la variable initiale, on trouve que pour tous entiers K et N , pour tout $p \in [1, \infty[$ et $c > 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$, on ait

$$\begin{aligned} \|\langle \sqrt{h}x \rangle^K h_n\|_{L^p(|x| \geq c\lambda_n)} &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/4-1/2} \times \|h_n\|_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/4-1/2} \times \|h_n\|_{\overline{H}^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/2-1} \times \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^K h_n\|_{L^p(|x| \geq c\lambda_n)} &\leq \|h_n\|_{L^p(|x| \geq c\lambda_n)} + h^{-K/2} \|\langle \sqrt{h}x \rangle^K h_n\|_{L^p(|x| \geq c\lambda_n)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/2-1-K/2} \times \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times \lambda_n^{-2N+d/p+d+K+2} \times \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. \square

On termine la section avec une propriété de calcul fonctionnel qui explique que certains opérateurs peuvent être approximés par des opérateurs pseudo-différentiels.

Proposition 42 Soient $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi_2(x) = 1$ pour $x \in B(0, 1^+)$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $s \geq 0$, il existe une constante $C_{N,s} > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\Phi(x^2 + (hD)^2)u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))\chi_2 u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s} h^{N-s} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où $\Psi_0(x, \xi) = \Phi(x^2 + \xi^2)$, $Supp(\Psi_j) \subset ((x, \xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\Phi))$ et $\Psi_j \in T^{-j} \subset S^0$.

Preuve. On se sert de la proposition 2.1 de [BGT2].

Si $\chi_1 \chi_2 = \chi_1$ alors

$$\|\Phi(x^2 + (hD)^2)\chi_1 u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))\chi_2 u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s} h^{N-s} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec $\Psi_0(x, \xi) = \Phi(x^2 + \xi^2)$, $Supp(\Psi_j) \subset ((x, \xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\Phi))$ et $\Psi_j \in T^{-j}$.

Puis, il suffit de choisir correctement χ_1 pour avoir

$$\|\Phi(x^2 + (hD)^2)(1 - \chi_1)u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq h^\infty \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

c'est à dire

$$\left\| \Phi\left(\frac{H}{N^2}\right) (1 - \chi_1) \left(\frac{x}{N}\right) u \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq N^{-\infty} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où $N^2 = \frac{1}{h}$. Comme Φ est bornée et à support compact, on trouve

$$\left\| \Phi\left(\frac{H}{N^2}\right) v \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq N^s \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Il suffit de vérifier

$$\|(1 - \chi_1) \left(\frac{x}{N}\right) u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq N^{-\infty} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

pour $u = h_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il suffit alors d'utiliser la proposition 41 avec $\chi_1 = 1$ sur $B(0, 1^+)$. \square

Revenons à la preuve de l'inégalité (9). On peut écrire

$$u_M = \chi \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M + (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M$$

avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{15}{16}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Et, par l'inégalité triangulaire, nous devons estimer les deux termes suivants :

$$\|e^{itH} \chi \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M e^{itH} v_N\|_{L^2([-\epsilon, \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))} \quad (10)$$

et

$$\|e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M e^{itH} v_N\|_{L^2([-\epsilon, \epsilon], L^2(\mathbb{R}^d))}. \quad (11)$$

3.2. Estimation du premier terme : (10)

Le théorème 2.4 de [S] nous donne le résultat suivant :

Proposition 43 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle que pour tous $u \in H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|e^{it\Delta} u e^{it\Delta} v\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta \|u\|_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, à l'aide de la transformation de lentille, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 44 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle que pour tous $u \in H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|e^{itH} u e^{itH} v\|_{L^2([-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta \|u\|_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. En utilisant les propositions 20 et 43, on obtient que

$$\begin{aligned} & \|e^{itH} u e^{itH} v\|_{L^2([-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}], L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ &= \|e^{-itH} u e^{-itH} v\|_{L^2([-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}], L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\cos(2t)|^{2d}} \times |e^{it\Delta} u e^{it\Delta} v|^2 \left(\frac{\tan(2t)}{2}, \frac{x}{\cos(2t)} \right) dt dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\cos(2t)|^d} \times |e^{it\Delta} u e^{it\Delta} v|^2 \left(\frac{\tan(2t)}{2}, x \right) dt dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + (2t)^2)^{d/2-1} \times |e^{it\Delta} u e^{it\Delta} v|^2(t, x) dt dx \\ &\leq C \times \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{it\Delta} u e^{it\Delta} v|^2(t, x) dt dx \\ &\leq C \times \|u\|_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)}^2 \times \|v\|_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq C \times \|u\|_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)}^2 \times \|v\|_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité on utilise la proposition 3. \boxtimes

Nous allons montrer que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous N, M, u et v , si $M \geq N$ alors

$$\|e^{itH} v_N e^{itH} \chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) u_M\|_{L^2([-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta N^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{N}{M}\right)^{1/2-\delta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour cela, en utilisant la proposition 44, il suffit de prouver que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous M et u

$$\|\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) u_M\|_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \leq CM^{-1/2+\delta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Trivialement, nous avons que

$$\|\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) u_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, par interpolation, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout M et u ,

$$\|\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) u_M\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq CM^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (12)$$

On utilise alors le calcul semi classique. Pour une fonction u , on définit $\mathbf{u} : x \mapsto u(\frac{x}{\sqrt{h}})$ où $h = \frac{1}{M^2}$.

Remarquons que

$$\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) \left[\frac{H}{M^2}\right] (u)(x) = [\chi(4x^2)(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathbf{u})(\sqrt{h}x) \quad (13)$$

et que

$$\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) \left[\phi\left(\frac{H}{M^2}\right)\right] (u)(x) = [\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathbf{u})(\sqrt{h}x). \quad (14)$$

Ainsi, pour prouver (12), il suffit d'établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\chi(4x^2)\phi(x^2 + (hD)^2)u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (15)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right) u_M\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\leq \|[\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathbf{u})(\sqrt{h}\cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq h^{-\frac{1}{2}-\frac{d}{4}} \|[\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + x^2)](\mathbf{u})\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}-\frac{d}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch^{1/2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq CM^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Démontrons ensuite (15). Grâce à la proposition 42, on a

$$\begin{aligned} & \|\chi(4x^2)\phi(x^2 + (hD)^2)u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|\chi(4x^2)[\phi(x^2 + (hD)^2)u - Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u + Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u]\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq h\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'évaluer $\|\chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}$. On a

$$\begin{aligned} & \chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u \\ &= \frac{\chi(4x^2)}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} \frac{ih\xi}{ih\xi} e^{ix\xi} \chi(4x^2) \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \\ &= \frac{h}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x(e^{ix\xi}) \frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \\ &= \frac{h}{(2\pi)^d} \times \left(\nabla_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \nabla_x \left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \right) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Puis, comme $4x^2 \leq 1$ et $\frac{1}{2}^- \leq x^2 + \xi^2 \leq 2^+$ implique $\frac{1}{4}^- \leq \xi^2$, on en déduit que

$$(x, \xi) \longrightarrow \frac{\chi(4x^2)}{i\xi} \phi(x^2 + \xi^2) \in S^0 \text{ et } (x, \xi) \longrightarrow \nabla_x \left(\frac{\chi(4x^2)}{i\xi} \phi(x^2 + \xi^2) \right) \in S^0.$$

Ainsi, par le théorème 39, on a alors

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{h}{(2\pi)^d} \times \left(\nabla_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right) \right) \right\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{h}{(2\pi)^d} \times \left\| \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch\|\chi_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{h}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \nabla_x \left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \right) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \frac{h}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \nabla_x \left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi} \phi(x^2 + (h\xi)^2) \right) \mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi) d\xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch\|\chi_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq Ch\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre (15).

3.3. Estimation du second terme : (11)

Proposition 45 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tout $M \geq 1$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N M^{-N} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Montrons que la proposition 45 implique l'estimation du terme (11).

De

$$\|u\|_{L^\infty([a, b], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u\|_{L^\infty([a, b], \overline{H}^{\frac{d}{2}+1}(\mathbb{R}^d))}$$

et la proposition 45, on déduit pour $M \geq 10N$ que

$$\begin{aligned} & \|\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M e^{itH} v_N\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \|\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \times \|e^{itH} v_N\|_{L^\infty([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \|\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \times \|v_N\|_{\overline{H}^{\frac{d}{2}+1}(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_K M^{-K} N^{\frac{d}{2}+1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_K M^{-K+\frac{d}{2}+1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Et donc, il suffit d'estimer convenablement pour $M \geq 10N$, le terme suivant :

$$\|e^{itH} v_N (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))}. \quad (16)$$

Grâce au théorème 9, on trouve pour tout $R \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \|e^{itH} v_N (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \| \langle x \rangle^R e^{itH} v_N \langle x \rangle^{-R} (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq M^{-R} \times \| \langle x \rangle^R e^{itH} v_N (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq M^{-R} \times \| (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) \langle x \rangle^R e^{itH} v_N\|_{L^4([-T, T], L^4(\mathbb{R}^d))} \\ & \quad \times \|e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^4([-T, T], L^4(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq M^{-R} \times \| (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) \langle x \rangle^R e^{itH} v_N\|_{L^4([-T, T], L^4(\mathbb{R}^d))} \\ & \quad \times \|e^{itH} (1 - \chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M\|_{L^4([-T, T], \overline{W}^{\frac{d-2}{4}, \frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq M^{-R} \times \| \langle x \rangle^R (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} v_N\|_{L^\infty([-T, T], L^4(\mathbb{R}^d))} \times M^{\frac{d-2}{4}} \|u_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Puis, comme $Supp \left\{ (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) \right\} \subset \left\{ |x|^2 \geq \frac{M^2}{8} \times \frac{15}{16} \right\} \subset \left\{ |x|^2 \geq 5N^2 \right\}$ alors par la proposition 41, on déduit

$$\| (1 - \chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) \langle x \rangle^R e^{itH} v_N\|_{L^4([-T, T], L^4(\mathbb{R}^d))} \leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve de la proposition 45. En utilisant l'analyse semi classique comme en (14), il suffit de prouver l'existence d'un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,

$$\|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)\phi(x^2 + (hD)^2)u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (17)$$

En utilisant la proposition 42, il suffit d'établir le résultat suivant :

Pour toute fonction $g(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ vérifiant $\text{Supp}(g) \subset \{\frac{1}{4} \leq \xi^2 + x^2 \leq 4\}$ et tout entier $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,

$$\|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x, \xi))u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (18)$$

En effet, par la proposition 42,

$$\begin{aligned} & \|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)\phi(x^2 + (hD)^2)u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)[\phi(x^2 + (hD)^2)u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))u]\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{N-1} h^j \|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(\Psi_j(x, \xi))u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C_N h^N \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=0}^{N-1} h^j \|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(\Psi_j(x, \xi))u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C_N h^N \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Lemma 46 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que si g est une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ vérifiant $\text{Supp}(g) \subset \{\frac{1}{4} \leq \xi^2 + x^2 \leq 4\}$ alors pour tout entier $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,*

$$\|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x, \xi))u\|_{L^2([-T,T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. On définit

$$w(s, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}\Phi(s, x, \xi)} a(s, x, \xi, h) \hat{u}\left(\frac{\xi}{h}\right) \frac{d\xi}{(2\pi h)^d}$$

où

$$a(s, x, \xi, h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j(s, x, \xi).$$

Supposons que

$$\begin{cases} \Phi(0, x, \xi) = x \cdot \xi, \\ \partial_s \Phi - |\nabla \Phi|^2 - x^2 = 0, \\ \begin{cases} a_0(0, x, \xi) = (1-\chi)(4x^2)g(x, \xi), \\ \partial_s a_0 - 2\nabla \Phi \cdot \nabla a_0 - \Delta(\Phi)a_0 = 0, \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_j(0, x, \xi) = 0, \\ \partial_s a_j - 2\nabla \Phi \cdot \nabla a_j - \Delta(\Phi)a_j = -i\Delta(a_{j-1}), \end{cases}$$

pour $1 \leq j \leq N$.

Alors

$$\begin{aligned} ih\partial_s w - h^2 \Delta w + x^2 w &= -h^{N+2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}\Phi(s,x,\xi)} \Delta(a_N(s,x,\xi)) \hat{u}\left(\frac{\xi}{h}\right) \frac{d\xi}{(2\pi h)^d} \\ &:= h^{N+2} f. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\chi(8x^2) e^{itH_h/h} (1 - \chi)(4x^2) Op(g(x, h\xi)) u \\ &= \chi(8x^2) w(t, x) - ih^{N+2} \chi(8x^2) \int_0^t e^{i(t-s)H_h/h} f(s) ds. \end{aligned}$$

Remarquons que si Ψ est solution de l'équation $\partial_t \Psi + |\nabla \Psi|^2 = 0$ avec donnée initiale $\Psi(0, x, \xi) = x \cdot \xi$ alors $\Phi(t, x, \xi) = \Psi\left(\frac{-\tan 2t}{2}, \frac{x}{\cos 2t}, \xi\right) + \frac{x^2 \tan 2t}{2}$ est solution de l'équation $\partial_s \Phi - |\nabla \Phi|^2 - x^2 = 0$ avec même donnée initiale.

Par la méthode des caractéristiques, on trouve

$$\Psi(t, x, \xi) = -t|\xi|^2 + x \cdot \xi,$$

puis on déduit que

$$\Phi(t, x, \xi) = \frac{\tan(2t)}{2} (\xi^2 + x^2) + \frac{x \cdot \xi}{\cos(2t)}.$$

Ainsi

$$\nabla \Phi = \frac{\xi}{\cos(2t)} + x \tan(2t) \text{ et } \Delta \Phi = d \tan(2t).$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, on trouve

$$a_0 \left(t, x - 2 \int_0^t \nabla \Phi, \xi \right) = \frac{a_0(0, x, \xi)}{|\cos 2t|^{\frac{d}{2}}}, \quad (19)$$

et

$$a_j \left(t, x - 2 \int_0^t \nabla \Phi, \xi \right) = -i \int_0^t \left| \frac{\cos(2s)}{\cos(2t)} \right|^{\frac{d}{2}} \Delta a_{j-1} \left(s, x - 2 \int_0^s \nabla \Phi, \xi \right) ds. \quad (20)$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $|x| \leq \frac{1}{2}$,

$$a_0(0, x, \xi) = 0$$

Par conséquent, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $|x| \leq \frac{\sqrt{15}}{8}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$a_j \left(t, x - 2 \int_0^t \nabla \Phi, \xi \right) = 0.$$

Or $\int_0^t \nabla \Phi = \xi F(t) - \frac{x \log \cos(2t)}{2}$ avec F une fonction continue vérifiant $F(0) = 0$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}]$ tel que si $|t| \leq T$ alors $|F(t)| \leq \epsilon$ et $|\log \cos 2t| \leq \epsilon$.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
y &= x - 2 \int_0^t \nabla \Phi = x(1 + \log \cos 2t) - 2\xi F(t) \\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{y + 2\xi F(t)}{1 + \log \cos 2t}
\end{aligned}$$

et que si $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$, $\xi^2 \leq 4$ et $|t| \leq T$ alors $|x| \leq \frac{1/\sqrt{8}+4\epsilon}{1-\epsilon} \leq \frac{\sqrt{15}}{8}$, si ϵ choisi correctement.

Cela implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $|t| \leq T$

$$Supp(a_j(t)) \subset B_x \left(0, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^c \times B_\xi(0, 2).$$

Par conséquent, si $|t| \leq T$, comme $Supp(\chi(8x^2)) \subset B_x(0, \frac{1}{\sqrt{8}})$, on déduit que

$$\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1 - \chi)(4x^2)Op_h(g(x, \xi))u = -ih^{N+2}\chi(8x^2) \int_0^t e^{i(t-s)H_h/h}f(s) ds.$$

Puis, par le théorème 10, on trouve

$$\begin{aligned}
& \|\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1 - \chi)(4x^2)Op_h(g(x, \xi))u\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq h^{N+2} \left\| \chi(8x^2) \int_0^t e^{i(t-s)H_h/h}f(s) ds \right\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq h^{N+2} \|f\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq h^{N+2} \|\Delta a_N\|_{L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d)))} \times \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré si $\Delta a_N \in L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d)))$.

On démontre par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$, que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_x^\alpha a_N \in L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d))).$$

Pour $N = 0$, à l'aide de (19), on voit par changement de variables que

$$\partial_x^\alpha a_0 \in L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d))) \text{ si } \partial_x^\alpha a_0(0) \in L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d)).$$

Or $a_0(0) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a_0(0)) \subset \{(x, \xi)/x^2 \leq 1, \xi^2 \leq 4\}$ et le cas $N = 0$ est évident.

Supposons le résultat établi au rang $N - 1$ et montrons le au rang N . À l'aide de (20), on note que $\partial_x^\alpha a_N \in L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d)))$ si $\partial_x^{\alpha+2} a_{N-1} \in L_t^1([-T, T], L_x^2(\mathbb{R}^d, L_\xi^2(\mathbb{R}^d)))$. Cette dernière affirmation étant claire par hypothèse de récurrence. \square

3.4. Estimées bilinéaires et espaces de Bourgain

L'objectif de cette section consiste à écrire l'estimée bilinéaire du théorème 31 dans les espaces de Bourgain. Plus précisément, on cherche à établir les deux théorèmes suivants :

Theorem 47 *Il existe $\delta_0 \in]0, \frac{1}{2}]$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, il existe $b' < \frac{1}{2}$ et une constante $C > 0$ tels que pour tous u, v, M, N ,*

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}+\delta} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, b'}} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b'}}.
\end{aligned}$$

Theorem 48 Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors il existe $\delta_0 \in]0, \frac{1}{2}]$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, il existe $b' < \frac{1}{2}$ et une constante $C > 0$ tels que pour tous u, u_0, M, N ,

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}+\delta} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)}\right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b'}}. \end{aligned}$$

Pour démontrer ces théorèmes, on adapte la preuve du lemme 4.4 de [BGT3]. Commençons par remarquer qu'il suffit de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 49 Pour tout $b \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous u, v, M, N ,

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)}\right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, b}} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b}}. \end{aligned}$$

Proposition 50 Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $b \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous u_0, v, M, N ,

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)}\right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b}}. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, d'après la proposition 13 (avec $\theta = \frac{1}{2}$), on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \|\Delta_N(v)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \times \|\Delta_M(u)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, 1/4+\epsilon}} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{d/2+\epsilon, 1/4+\epsilon}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))} \times \|\Delta_M(u)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \|\Delta_N(u_0)\|_{\overline{H}^{d/2-1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, 1/4+\epsilon}(\mathbb{R} \ast \mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \|\Delta_N(u_0)\|_{\overline{H}^{d/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, 1/4+\epsilon}(\mathbb{R} \ast \mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \times \|\Delta_M(u)\|_{L^4(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{d/2+\epsilon, 1/4+\epsilon}} \\ & \leq C \|\Delta_N(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{d/2+\epsilon, 1/4+\epsilon}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, par interpolation, pour tout $\theta \in [0, 1]$, on trouve

$$\begin{aligned} \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} & \leq C \times \min(M, N)^{\frac{d-2}{2}+\theta(1+\epsilon)} \times \left(\frac{\min(M, N)}{\max(M, N)}\right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \\ & \quad \times \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C \times \min(M, N)^{\frac{d-2}{2}+\theta(1+\epsilon)} \\ & \quad \times \left(\frac{\min(M, N)}{\max(M, N)} \right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \times \|\Delta_N(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}}. \end{aligned}$$

Choisissons $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ et $\theta = \frac{\epsilon}{4}$ alors

$$\begin{aligned} b(1-\theta) + \theta\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right) &= b - \frac{b\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right) \\ &\leq b - \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{16} + \frac{\epsilon^2}{4} \leq b - \frac{\epsilon}{17}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $b = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{34}$ et de poser $b' = b(1-\theta) + \theta(\frac{1}{4} + \epsilon) < \frac{1}{2}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}+\epsilon} \times \left(\frac{\min(M, N)}{\max(N, M)} \right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \times \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, b'}} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b'}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}+\epsilon} \times \left(\frac{\min(M, N)}{\max(M, N)} \right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \times \|\Delta_N(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b'}}. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{1}{2} - \delta\right)(1-\theta) = \frac{1}{2} - \frac{5\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{8} \geq \frac{1}{2} - \epsilon$$

et les théorèmes 47 et 48 suivent avec $\delta_0 = \epsilon$.

Puis, comme pour le lemme 4.4 de [BGT3], pour prouver la proposition 49, il suffit d'établir la proposition suivante :

Proposition 51 *Pour tout $b \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous u, v, M, N ,*

$$\begin{aligned} & \|\Delta_N(v)\Delta_M(u)\|_{L^2([0,1], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)} \right)^{1/2-\delta} \times \|\Delta_N(v)\|_{\overline{X}^{0, b}} \|\Delta_M(u)\|_{\overline{X}^{0, b}}. \end{aligned}$$

Enfin, pour obtenir les propositions 50 et 51, il suffit d'utiliser le lemme 2.1 de [BGT2] et le théorème 31.

4. Données initiales aléatoires et espaces de Sobolev

Le but de cette partie est de montrer que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas de gagner de dérivée dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Theorem 52 *Pour tout $s \geq 0$, si*

$$u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$$

alors

$$u_0(\omega, \cdot) \notin H^s(\mathbb{R}^3) \quad \omega \text{ presque surement.}$$

On désigne par X la loi commune des variables aléatoires $(g_n)_n$ et pour prouver le théorème, il suffit de considérer les cas où $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ ou $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $0 \leq \chi \leq 1$ et définissons $\sigma_N^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) |c_n|^2 \lambda_n^{2s}$. Comme $\sigma_N^2 \geq \sum_{\lambda_n \leq N} |c_n|^2 \lambda_n^{2s}$ alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^2 = \infty$.

Lemma 53 *Soit X une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ alors pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$P(X \geq \lambda E(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz, on pose $A = \{X \geq \lambda E(X)\}$ et on obtient

$$E(X) = E(X \mathbf{1}_A + X \mathbf{1}_{A^c}) \leq \sqrt{E(X^2)P(A)} + \lambda E(X).$$

Donc

$$(1 - \lambda)E(X) \leq \sqrt{E(X^2)P(A)},$$

et le résultat suit en élevant au carré. \square

Proposition 54 *Pour tout $s \geq 0$, on a*

$$P\left(\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty\right) = 1 \text{ ou } = 0.$$

Preuve. Rappelons que $u_0^\omega = \sum_i X_i(\omega)$ avec X_i indépendants et $X_i(\omega) \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque surement. Par conséquent, pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty$$

si et seulement si $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) \left(\sum_{i \geq K} X_i(\omega) \right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty,$

donc si nous posons $F_i = \sigma(X_i, X_{i+1}, \dots)$ on a que

$$\left\{ \omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty \right\} \in \bigcap_{K \in \mathbb{N}} F_K.$$

Par conséquent $\left\{ \omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega \right\|_{H^s} = \infty \right\}$ est dans la tribu asymptotique et le lemme est prouvé par la loi du 0-1. \square

Proposition 55 *Pour $s \geq 0$, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \lambda_n^{2s} = +\infty$ alors*

$$P\left(\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty\right) = 1.$$

Preuve.

On pose $M = \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0 \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$ et $S_N = \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0 \right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$

En utilisant le lemme 53, on obtient

$$\begin{aligned}
P\left(M^2 \geq \frac{1}{2} E(X^2) \times C_1^2 \sigma_N^2\right) &\geq P\left(S_N^2 \geq \frac{1}{2} E(X^2) \times C_1^2 \sigma_N^2\right) \\
&\geq P\left(S_N^2 \geq \frac{1}{2} E\left(\left\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2\right)\right) \\
&\geq \frac{1}{4} \frac{E\left(\left\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2\right)^2}{E\left(\left\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^4\right)}.
\end{aligned}$$

En effet, grâce à la proposition 30, nous avons

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2\right) \\
&\geq E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla|^s(h_n) \cdot |\nabla|^s(h_m) dx\right) \\
&\geq E(|X|^2) \times \sum_n \chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) |c_n|^2 \|\nabla^s(h_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\geq E(|X|^2) \times C_1^2 \sigma_N^2.
\end{aligned}$$

De plus, grâce encore une fois à la proposition 30, on établit

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\right\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^4\right) \\
&\leq E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_n) \nabla^s(h_m) dx\right)^2 \\
&\quad + E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)}\right)^2 \\
&\leq E\left(\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right) c_{n_1} \overline{c_{n_2}} c_{n_3} \overline{c_{n_4}}\right. \\
&\quad \times g_{n_1}(\omega) \overline{g_{n_2}(\omega)} g_{n_3}(\omega) \overline{g_{n_4}(\omega)} \times \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_{n_1}) \nabla^s(h_{n_2}) \times \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_{n_3}) \nabla^s(h_{n_4}) \\
&\quad + E\left(\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right)\right. \\
&\quad \times c_{n_1} \overline{c_{n_2}} c_{n_3} \overline{c_{n_4}} \times g_{n_1}(\omega) \overline{g_{n_2}(\omega)} g_{n_3}(\omega) \overline{g_{n_4}(\omega)} \\
&\leq 4E(|X|^4) \times \sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)^2 \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)^2 |c_n|^2 |c_m|^2 \|\nabla^s(h_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\nabla^s(h_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\quad + 4E(|X|^4) \times \sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)^2 \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)^2 |c_n|^2 |c_m|^2 \\
&\leq 4E(|X|^4) \times C_2^4 \sigma_N^4 + 4E(|X|^4) \times \sigma_N^4.
\end{aligned}$$

Et, par conséquent,

$$P \left(M^2 \geq \frac{1}{2} E(|X|^2) \times C_1 \sigma_N^2 \right) \geq \frac{E(|X|^2)^2}{E(|X|^4)} \times \left(\frac{C_1}{2} \right)^4 \times \left(\frac{1}{C_2^4 + 1} \right).$$

Puis en utilisant le théorème de convergence monotone, on trouve

$$P(M = \infty) \geq \frac{E(|X|^2)^2}{E(|X|^4)} \times \left(\frac{C_1}{2} \right)^4 \times \left(\frac{1}{C_2^4 + 1} \right).$$

Et finalement d'après la proposition 54, on a $P(M = \infty) = 1$. \square

Theorem 56 *Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$,*

$$\|\chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

Le théorème 56 et la proposition 55 impliquent le théorème 52.

En effet, si nous supposons que $u_0^\omega \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque sûrement alors par la proposition 55, on obtient

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \|\chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u_0^\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

puis

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \|\chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0^\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} < \infty \text{ } \omega \text{ presque sûrement.}$$

Ce résultat contredit la proposition 55 et finalement il suffit de prouver le théorème 56.

Preuve du théorème 56. En utilisant (13) et (14), il suffit de montrer que :

$\forall s \geq 0, \exists C > 0$ et h_0 tels que $\forall 0 < h \leq h_0, \forall u \in H^s(\mathbb{R}^3)$

$$\|\chi(x^2 + (hD)^2)u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}. \quad (21)$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \|\chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \| [\chi(x^2 + (hD)^2)]u(\sqrt{h}.)\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \| [\chi(x^2 + (hD)^2)]u(\sqrt{h}.)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla^s [\chi(x^2 + (hD)^2)]u(\sqrt{h}.)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq h^{-3/4} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + h^{s/2-3/4} \| [\chi(x^2 + (hD)^2)]u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + h^{s/2-3/4} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Par interpolation, on peut limiter la preuve au cas où s est un entier. Grâce à la proposition 42 (avec $N = s$), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\|\chi(x^2 + (hD)^2)u - \sum_{j=0}^N h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

avec $Supp(\Psi_j(x, \xi)) \subset ((x, \xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\chi))$.

Ainsi, pour obtenir (21), il suffit d'obtenir que pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C > 0$ et $h_0 \geq 1$ telles que pour tout $h \in]0, h_0]$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$,

$$\|Op_h(\Psi_j(x, \xi))u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}. \quad (22)$$

Enfin, pour établir (22), il suffit d'utiliser le théorème 39 et de remarquer que

$$(x, \xi) \longrightarrow \chi(x^2 + \xi^2) \in S^0 \text{ and } (x, \xi) \longrightarrow \Psi_j(x, \xi) \in S^0. \quad \square$$

Pour terminer cette partie, on évalue la norme Sobolev de la donnée initiale. Cela permettra d'établir que les théorèmes 4 et 6 seront valides pour des équations sur-critiques avec des données initiales "grandes".

Proposition 57 *Soit $\sigma \geq 0$, $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $s \geq \sigma$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n^{2s} |c_n|^2 \leq 1$$

alors pour tout $t \geq 0$,

$$\mu\left(u_0 / \|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) \leq \begin{cases} e^{t^2 - \frac{1}{2}\|\chi(\frac{H}{N^2})u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2} & \text{dans le cas Gaussien,} \\ e^{t^2 - \epsilon^2\|\chi(\frac{H}{N^2})u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2} & \text{dans le cas Bernoulli.} \end{cases}$$

Preuve. Effectuons la preuve dans le cas Gaussien. En utilisant que $-\ln(1+u) \leq -\frac{u}{2}$ pour tout $u \in [0, 1]$ et l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned} \mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) &= P\left(\omega \in \Omega / e^{-\|\chi(\frac{H}{N^2})u_0^\omega\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2} \geq e^{-t^2}\right) \\ &\leq e^{t^2} E\left(e^{-\|\chi(\frac{H}{N^2})u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2}\right) \\ &\leq e^{t^2} \prod_{n \in \mathbb{N}} E\left(e^{-\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2s}|c_n|^2|X|^2}\right) \\ &\leq e^{t^2} \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{1 + \chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) \\ &\leq e^{t^2} \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(e^{-\frac{1}{2}\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) \\ &\leq e^{t^2 - \frac{1}{2}\|\chi(\frac{H}{N^2})u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarques : 1- Par exemple, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et $\lambda_n^{2s} |c_n|^2 \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq t\right) = 0.$$

Encore une fois, cela signifie bien que la norme Sobolev de la donnée initiale n'est pas "petite".

2- Par exemple, pour N fixé, on peut choisir $c_n = \frac{1}{N^{s-\epsilon}}$ pour n vérifiant $\lambda_n \sim N$ et 0 sinon et obtenir pour $t \geq 0$,

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq t\right) \leq \exp\left(t^2 - \frac{N^\epsilon}{2}\right),$$

alors que $\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} = N^{\sigma-s+\epsilon} \ll 1$.

5. L'argument de point fixe

Dans cette partie, on établit les estimées qui vont nous servir à appliquer un théorème de point fixe. ψ désigne une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et supportée dans $[-2\pi, 2\pi]$.

Proposition 58 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence de deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,*

$$\|\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa}\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3. \quad (23)$$

Preuve. Par dualité, il suffit de montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa}M^{-\delta}\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3\|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}.$$

Grâce au lemmme 29, nous pouvons nous ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.

Cas $N_3 \leq M \leq N_1^{1+\delta}$: En utilisant le théorème 47, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\ & \leq \|\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_M(w)\Delta_{N_3}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq (N_2N_3)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{N_3}{M}\right)^{1/2-\delta} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\ & \leq \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{N_3}{M}\right)^{1/2-\delta} (N_2N_3)^{1/2+\delta-s} \left(\frac{M}{N_1}\right)^s \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq (N_2N_3)^{1-s} M^{-1/2+\delta} N_1^{-1/2+(1+s)\delta} \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} M^{1/2-s+(1+s)\delta} N_1^{1/2-s+2\delta} \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} N_1^{1-2s+(3+s)\delta} \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}. \end{aligned}$$

Cas $M \leq N_3$: En utilisant le théorème 47, on établit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\ & \leq \|\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_M(w)\Delta_{N_3}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq (N_2M)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_3}\right)^{1/2-\delta} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\ & \leq N_2M \left(\frac{1}{N_3N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_1N_2N_3}\right)^s \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} N_2^{1-s} N_3^{1/2+2\delta} \times \left(\frac{1}{N_1}\right)^{1/2+s-\delta} \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} N_1^{1-2s+3\delta} \times \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 59 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence de deux constantes $C, \kappa > 0$ telles que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N ,*

$$\|\Delta_N(e^{itH}u_0)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,

$$\|\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 + \lambda^3), \quad (24)$$

$$\|\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 + \lambda^3). \quad (25)$$

Preuve. On montre (24), la preuve de (25) étant similaire.

Par dualité, il suffit de montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa} M^{-\delta} \times (\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 + \lambda^3) \times \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}.$$

Grâce au lemme 29, nous pouvons nous ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.

Cas $N_2 \leq M \leq N_1^{1+\delta}$: En utilisant le théorème 47 et la proposition 12, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w) \\ & \leq \|\Delta_{N_2}(v)\Delta_M(w)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq N_2^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{M}\right)^{1/2-\delta} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(e^{itH}u_0)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\ & \leq N_2^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{M}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_1 N_2}\right)^s N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq N_2^{1-s} M^{s-1/2+\delta} N_1^{-s} N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} N_2^{1-s} N_1^{-1/2+(3+s)\delta} N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq N_1^{1/2-s+(3+s)\delta} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}. \end{aligned}$$

Cas $M \leq N_2$: En utilisant le théorème 47 et la proposition 12, on établit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w) \\ & \leq \|\Delta_{N_2}(v)\Delta_M(w)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq M^{1/2+\delta} \left(\frac{M}{N_2}\right)^{1/2-\delta} \\ & \quad \times \|\Delta_{N_1}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(e^{itH}u_0)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\ & \leq M^{1/2+\delta} \left(\frac{M}{N_2}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_1 N_2}\right)^s N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq N_2^{-1/2-s+\delta} M^{1+s} N_1^{-s} N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq N_2^{1/2+\delta} N_1^{-s} N_3^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ & \leq M^{-\delta} N_1^{1/2-s+2\delta} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 60 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N ,*

$$\|\Delta_N(e^{itH}u_0)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6} \text{ et } \| [e^{itH}u_0]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], H^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^2$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,

$$\|v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C(\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 + \lambda^3). \quad (26)$$

Preuve. En utilisant les propositions 14 et 12, on trouve

$$\begin{aligned} & \|v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \\ & \leq \|v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq \|v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{L^{1+\delta}([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq \|v\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \times \|e^{itH}u_0\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 \\ & \quad + \|v\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \times \| [e^{itH}u_0]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq \lambda^2 \|v\|_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq C(\|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3 + \lambda^3). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 61 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que si pour un certain $\lambda > 0$, on a*

$$\| [e^{itH}u_0]^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^3$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,

$$\|\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C\lambda^3. \quad (27)$$

Preuve. En utilisant la proposition 14, on établit

$$\begin{aligned} & \|\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \\ & \leq \|\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0\|_{L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq C \| [e^{itH}u_0]^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ & \leq C\lambda^3. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 62 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s \in]\frac{1}{2}, 1[$, on ait l'existence de deux constantes $C > 0$, $\kappa > 0$ et d'un réel $R \in [2, \infty[$ tels que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N ,*

$$\begin{cases} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda, \\ \|\Delta_N(e^{itH}u_0)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}, \\ \|\Delta_N(e^{itH}u_0)\|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{s-1/4}, \end{cases}$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,

$$\|\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3). \quad (28)$$

Preuve. Soit $\delta > 0$ assez petit, fixé par la suite.

Cas $N_1 \geq (N_2N_3)^{\frac{1-s}{1-s-4\delta}}$: Par dualité, il suffit d'établir

$$\int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa} M^{-\delta} \times \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \times (\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3).$$

Grâce au lemme 29, on peut se ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.
Si $N_3 \leq M$ alors en utilisant les théorèmes 47 et 48, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^* \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\
& \leq \|\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\
& \leq (N_2 N_3)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{N_3}{M}\right)^{1/2-\delta} \\
& \quad \times \|\Delta_{N_1}(u_0)\|_{L^2} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\
& \leq (N_2 N_3)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{N_3}{M}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_2 N_3}\right)^s \\
& \quad \times \lambda \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{s,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
& \leq M^{-\delta} N_1^{-\delta} N_1^{-1+s+4\delta} (N_2 N_3)^{1-s} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
& \leq M^{-\delta} N_1^{-\delta} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

Puis, si $N_3 \geq M$, en utilisant les théorèmes 47 et 48, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^* \mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\
& \leq \|\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \times \|\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)\|_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\
& \leq (N_2 M)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_3}\right)^{1/2-\delta} \\
& \quad \times \|\Delta_{N_1}(u_0)\|_{L^2} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{0,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{0,b'}} \\
& \leq (N_2 M)^{1/2+\delta} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_3}\right)^{1/2-\delta} \left(\frac{M}{N_2 N_3}\right)^s \\
& \quad \times \lambda \|\Delta_{N_2}(v)\|_{\overline{X}^{s,b}} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,b}} \|\Delta_M(w)\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
& \leq M^{-\delta} N_1^{-\delta} N_1^{-1+s+4\delta} (N_2 N_3)^{1-s} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
& \leq M^{-\delta} N_1^{-\delta} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \|w\|_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

Cas $N_1 \leq (N_2 N_3)^{\frac{1-s}{1-s-4\delta}}$: En utilisant les propositions 14 et 12, on établit

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\|_{\overline{X}^{s,-b'}} \\
& \leq \|\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\|_{L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
& \leq \|\Delta_{N_1}(e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\|_{L^{1+\delta}([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
& \leq \|\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)\|_{L^{\frac{(1+\delta)(1+2\delta)}{\delta}}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \times \prod_{i=1}^2 \|\Delta_{N_i}(v)\|_{L^{2(1+2\delta)}(\mathbb{R}, L^s(\mathbb{R}^3))} \\
& \quad + \|\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \\
& \quad + \|\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_{N_2}(v)\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \|\Delta_{N_3}(v)\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
& \leq N_1^{s-1/4} (N_2 N_3)^{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+2\delta}-s} \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 + N_1^{-1/6} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 \\
& \leq (N_2 N_3)^{\frac{(1-s)(s-1/4+\delta)}{1-s-4\delta}} (N_2 N_3)^{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+\delta}-s} N_1^{-\delta} \times \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2 + N_1^{-1/6} \lambda \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^2,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s)(s-1/4+\delta)}{1-s-4\delta} + \frac{9}{8} - \frac{1}{1+2\delta} - s &= s - \frac{1}{4} + \delta + \frac{4\delta(s-\frac{1}{4}+\delta)}{1-s-4\delta} + \frac{9}{8} - \frac{1}{1+2\delta} - s \\
&= \frac{7}{8} + \frac{4\delta(s-\frac{1}{4}+\delta)}{1-s-4\delta} - \frac{1}{1+2\delta} \\
&= -\frac{1}{8} + o(\delta) < 0.
\end{aligned}$$

Et finalement la proposition est démontrée avec $R = \frac{(1+\delta)(1+2\delta)}{\delta}$. \square

Définition 63 Soit $\lambda > 0$ et définissons $E_0(\lambda)$ comme l'ensemble des fonctions $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ qui vérifient

$$\begin{cases}
\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda \\
\| [e^{itH}u_0]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^2 \\
\| [e^{itH}u_0]^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^3 \\
\| \Delta_N(e^{itH}u_0) \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}, \quad \forall N \\
\| \Delta_N(e^{itH}u_0) \|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{s-1/4}, \quad \forall N
\end{cases}$$

où R est fixé par la proposition 62.

Theorem 64 Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $K \in \{-1, 1\}$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,

$$\begin{aligned}
\left\| \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} \psi(s) K \cos(2s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) ds \right\|_{\overline{X}^{s,b}} \\
\leq C \times (\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3).
\end{aligned}$$

Preuve. Pour tout $b > \frac{1}{2}$, en utilisant les propositions 15 et 16, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left\| \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) ds \right\|_{\overline{X}^{s,b}} \\
&\leq C \| K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) \|_{\overline{X}^{s,b-1}} \\
&\leq C \| |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) \|_{\overline{X}^{s,b-1}}.
\end{aligned}$$

Puis en utilisant (23), (24), (25), (26), (27), (28), on établit l'existence d'un entier $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $u_0 \in E_0(\lambda)$,

$$\| |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) \|_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C(\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}^{s,b}}^3).$$

Il suffit alors de choisir $b = 1 - b' > \frac{1}{2}$ et la proposition est démontrée. \square

Theorem 65 Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $K \in \{-1, 1\}$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors pour tout $v \in \overline{X}_T^{s,b}$,

$$\begin{aligned}
\left\| \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) ds \right\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \\
\leq C(\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^3).
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $w \in \overline{X}^{s,b}$ telle que $w|_{[-T,T]} = v$ alors

$$\begin{aligned} & \|\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v) ds\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \\ & \leq \|\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + w|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + w) ds\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \\ & \leq C(\lambda^3 + \|w\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^3) \text{ pour tout } w. \end{aligned} \quad \square$$

De manière similaire, on pourrait démontrer le théorème suivant :

Theorem 66 Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $K \in \{-1, 1\}$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors pour tous $v_1, v_2 \in \overline{X}_T^{s,b}$,

$$\begin{aligned} & \left\| \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v_1|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v_1) ds \right. \\ & \quad \left. - \psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v_2|^2 \times (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v_2) ds \right\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \\ & \leq C \|v_1 - v_2\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \times (\lambda^2 + \|v_1\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^2 + \|v_2\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^2). \end{aligned}$$

6. Solutions globales pour l'équation (NLS)

Dans cette partie, on applique un théorème de point fixe pour établir l'existence de solutions globales pour l'équation (NLS). On démontre également l'unicité des solutions, ainsi que quelques propriétés qu'elles vérifient comme le scattering.

Commençons par établir l'existence, pour cela considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - H u = K \cos(2t) |u|^2 u, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{NLSH})$$

Theorem 67 Soit $\frac{1}{2} < s < 1$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ alors il existe une unique solution à l'équation (NLSH) avec donnée initiale u_0 dans l'espace $e^{-itH} u_0 + B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{C}})$.

Preuve. On définit

$$L : v \rightarrow -i\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds,$$

$u = e^{-itH} u_0 + v$ est l'unique solution de (NLSH) dans l'espace $e^{-itH} u_0 + B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, R)$ si et seulement si v est l'unique point fixe de L dans l'espace $B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, R)$.

Selon les théorèmes 65 et 66, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{\overline{X}_T^{s,b}} & \leq C(\lambda^3 + \|v\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^3), \\ \|L(v_1) - L(v_2)\|_{\overline{X}_T^{s,b}} & \leq C \|v_1 - v_2\|_{\overline{X}_T^{s,b}} (\lambda^2 + \|v_1\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^2 + \|v_2\|_{\overline{X}_T^{s,b}}^2). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ alors L est une application contractante de l'espace complet

$B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{C}})$ et admet donc un unique point fixe. □

Theorem 68 Soit $\frac{1}{2} < s < 1$ alors il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ alors il existe une unique solution globale à l'équation (NLS)

avec donnée initiale u_0 dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X^s}(0, \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{C}})$.

La constante C est donnée par les théorèmes 65 et 66 et la constante c par la proposition 24.

Preuve. Soit u donnée par le théorème 67 et définissons

$$\tilde{u}(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{3/2} \times u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}}.$$

D'après le théorème 20, comme u est solution de (NLSH) sur $] -T, T[$ alors \tilde{u} est solution globale de (NLS).

Ainsi, pour obtenir le théorème, il suffit de remarquer que

$$(e^{it\Delta}u_0)(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{3/2} \times (e^{-itH}u_0) \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}},$$

et d'utiliser la proposition 24. \square

L'existence de solutions étant prouvée, on démontre ensuite qu'elles sont uniques.

Theorem 69 Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors si \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 sont deux solutions de (NLS) de l'espace $e^{it\Delta}u_0 + X^s$, alors

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \text{ dans } C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$$

Preuve. Il suffit de montrer que $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t)$ pour $t \geq 0$ (on remarque que $x_i(t) := \tilde{u}_i(-t)$ vérifie $i\frac{\partial x_i}{\partial t} - \Delta x_i = -K|x_i|^2 x_i$ et on pourra faire la même preuve pour obtenir que $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \geq 0$, c'est à dire $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t)$ pour $t \leq 0$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial_t \|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2\Re \left(\langle \partial_t(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \\ &\leq 2 \left| \|\tilde{u}_1(t)\|^2 \tilde{u}_1(t) - \|\tilde{u}_2(t)\|^2 \tilde{u}_2(t), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)} \right| \\ &\leq 2 \|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \times \left\| \|\tilde{u}_1(t)\|^2 \tilde{u}_1(t) - \|\tilde{u}_2(t)\|^2 \tilde{u}_2(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq 4 \|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \times (\|\tilde{u}_1(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\tilde{u}_2(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2). \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, le théorème est démontré si $\|\tilde{u}_1(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\tilde{u}_2(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ car $\|\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 0$.

Le théorème est donc clair puisque grâce à la proposition 22,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_i\|_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} + \|\tilde{v}_i\|_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq C(\|e^{itH}u_0\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} + \|\tilde{v}_i\|_{X^s}) \\ &\leq C(\lambda + \|\tilde{v}_i\|_{X^s}). \end{aligned} \quad \square$$

On prouve ensuite que les solutions construites diffusent en ∞ et $-\infty$. Pour prouver ce résultat, commençons par établir un lemme préliminaire.

Lemma 70 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\begin{aligned} & \left(e^{it\Delta} F\left(\frac{1}{2} \arctan 2t, \cdot\right) \right) (t, x) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{3/2} \times (e^{-itH} F(t, \cdot)) \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}}. \end{aligned}$$

Preuve. Rappelons la formule de Mehler, pour $t \in]-T, T[$ et $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(e^{-itH} f)(t, x) = \left(\frac{1}{2\pi i \sin 2t} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t} x^2 - \frac{xy}{\sin 2t} + \frac{\cos 2t}{\sin 2t} y^2 \right)} f(y) dy.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{3/2} \times (e^{-itH} F(t, \cdot)) \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi i t} \right)^{\frac{3}{2}} \times \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} F\left(\frac{1}{2} \arctan(2t), y\right) dy \\ &= \left(e^{it\Delta} F\left(\frac{1}{2} \arctan 2t, \cdot\right) \right) (t, x). \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 71 *Soit \tilde{u} l'unique solution de (NLS) construite dans le théorème 68, alors il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions telles que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. On a montré que

$$\begin{aligned} & -i\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \\ & \in \overline{X}_T^{s,b}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme 18,

$$\begin{aligned} & -ie^{-itH} \int_0^t e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \\ & \in C^0([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

Et donc, il existe une fonction $L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow T} \left\| L - ie^{-itH} \int_0^t e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \right\|_{\overline{H}^s} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} \left\| e^{itH} L - i \int_0^t e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \right\|_{\overline{H}^s} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} \left\| e^{iT H} L - i \int_0^t e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \right\|_{\overline{H}^s} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or, pour $t \in [-T, T]$,

$$u(t) = e^{-itH}u_0 - ie^{-itH} \int_0^t e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds.$$

Donc, par le lemme 70, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= e^{it\Delta} u_0 \\ + e^{it\Delta} \left[-i \int_0^{\frac{1}{2} \arctan 2t} e^{isH} K \cos(2s) \psi(s) |\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0 + v(s)) ds \right] \\ &= e^{it\Delta} u_0 + e^{it\Delta} F(t), \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t) - e^{iT H} L\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Et le théorème est démontré avec

$$L^+ = e^{iT H} L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3),$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{it\Delta} F(t) - e^{it\Delta} L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t) - L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t) - L^+\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Enfin, pour conclure cette partie, on démontre que le flot de l'équation est lipschitzien en un certain sens.

Theorem 72 Soient $u_0^1, u_0^2 \in E_0(\lambda)$ avec λ donné par le théorème 68 et soient \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 les solutions de (NLS), alors il existe une constante $C_\lambda > 0$ telle que

$$\|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{X^0} \leq C_\lambda \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Preuve. Grâce à la proposition 23, il suffit d'établir que

$$\|u_1 - u_2\|_{\overline{X}_T^0} \leq C_\lambda \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= e^{-itH} (u_0^1 - u_0^2) - i\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-s)H} \psi(s) K \cos 2s \times (|\psi(s) e^{-isH} u_0^1 + v_1(s)|^2 \\ &\quad * (\psi(s) e^{-isH} u_0^1 + v_1(s)) - |\psi(s) e^{-isH} u_0^2 + v_2(s)|^2 (\psi(s) e^{-isH} u_0^2 + v_2(s))) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les estimées de Strichartz et par la proposition 12, le fait que

$$\|v_i\|_{L^2([T, T], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \|v_i\|_{L^2([-T, T], \overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \leq C \|v_i\|_{\overline{X}_T^{s,b}} \leq C\lambda,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{\overline{X}_T^0} &\leq C (\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|v_1 - v_2\|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^3))}) \\ &\quad \times \left(1 + \sum_{j=1,2} \|e^{itH} u_0^j\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 + \|v_j\|_{L^2([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 \right) \\ &\leq C\lambda^2 (\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|v_1 - v_2\|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^3))}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour prouver le résultat, il suffit de montrer que

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Mais comme

$$i\partial_t v_i - H v_i = K \cos 2t |e^{-itH} u_0^i + v_i|^2 * (e^{-itH} u_0^i + v_i),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} & \partial_t \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= 2\Re \left(\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t (v_1(t) - v_2(t)) \cdot \overline{v_1(t) - v_2(t)} \right) \\ &= 2\Re \left(-iK \cos 2t * \int_{\mathbb{R}^3} (|e^{-itH} u_0^1 + v_1|^2 (e^{-itH} u_0^1 + v_1) \right. \\ & \quad \left. - |e^{-itH} u_0^2 + v_2|^2 (e^{-itH} u_0^2 + v_2)) \cdot \overline{v_1(t) - v_2(t)} \, dx \right) \\ &\leq \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad \times \| |e^{-itH} u_0^1 + v_1(t)|^2 * (e^{-itH} u_0^1 + v_1(t)) - |e^{-itH} u_0^2 + v_2(t)|^2 * (e^{-itH} u_0^2 + v_2(t)) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \times (\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \\ & \quad \times \left(\sum_{j=1,2} \|e^{itH} u_0^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a établi

$$\begin{aligned} \partial_t \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq (\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \\ & \quad \times \left(\sum_{j=1,2} \|e^{itH} u_0^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))} &\leq C \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad \sum_{j=1,2} \|e^{itH} u_0^j\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 + \|v_j\|_{L^2([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 \\ &\leq C e^{C\lambda^2} \times \|u_0^1 - u_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad \square \end{aligned}$$

7. Estimation de la régularité de la donnée initiale aléatoire

Dans cette partie, on estime la régularité de la donnée aléatoire en démontrant des estimées de types grandes déviations. En particulier, on établit que $u_0^\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_0(n)^\omega$

presque sûrement. On supposera que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ car dans ce dernier cas, il suffira de remplacer u_0 par $\epsilon * u_0$ pour revenir au cas où $\frac{g_n}{\epsilon} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

On définit pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\Omega_t &= \left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq t, \| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq t^2, \right. \\ &\quad \left. \| [e^{itH} u_0^\omega]^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq t^3, \bigcap_N \| \Delta_N(e^{itH} u_0^\omega) \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq tN^{-1/6}, \right. \\ &\quad \left. \bigcap_N \| \Delta_N(e^{itH} u_0^\omega) \|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq tN^{s-1/4} \right)\end{aligned}$$

et l'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Theorem 73 *Il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,*

$$P(\Omega_t^c) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}}. \quad (29)$$

On commence par établir des inégalités de type chaos de Wiener dans le cas où $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Pour cela, on introduit deux définitions et on démontre 3 lemmes préliminaires.

Définition 74 *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\mathcal{A}_{2p} = \{ \sigma \in \mathcal{S}_{2p} / \sigma^2 = Id \text{ et } \sigma(i) \neq i, \forall i \in \{1, \dots, 2p\} \},$$

et pour $p \in \mathbb{N}^$ et $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$, on pose*

$$\mathcal{I}(\sigma, p) = \{ i \in \{1, \dots, p\} / \sigma(2i) = 2i - 1 \}.$$

Lemma 75 *Soit X_n , $n \in \mathbb{N}$ une suite de variables indépendantes telles que $E(X_i^{2k+1}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout $2p$ -upplet $(n_1, \dots, n_{2p}) \in \mathbb{N}^{2p}$, si $E(X_{n_1} \times \dots \times X_{n_{2p}}) \neq 0$ alors il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$ telle que $n_{\sigma(i)} = n_i$, $\forall i \in \{1, \dots, 2p\}$.*

Preuve. Le lemme se démontre facilement par récurrence sur p . □

Lemma 76 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$Card(\mathcal{A}_{2p}) \leq (Cp)^p.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la formule de Sterling. En effet, on a

$$Card(\mathcal{A}_{2p}) = (2p-1) \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!} \leq (Cp)^p. \quad \square$$

Définition 77 *On définit*

$$l^2 = \left\{ c = (c_{n,m})_{n,m} \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \|c\|_{l^2} := \sqrt{\sum_{m,n} |c_{m,n}|^2} < \infty \right\},$$

et

$$\tilde{l}^1 = \left\{ c = (c_{n,m})_{n,m} \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \|c\|_{\tilde{l}^1} := \sum_n |c_{n,n}| < \infty \right\}.$$

Lemma 78 *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$ et c^1, c^2, \dots, c^p dans $\tilde{l}^1 \cap l^2$,*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| &\leq \prod_{\substack{i=1, \\ i \in \mathcal{I}(\sigma, p)}}^p \|c^i\|_{\tilde{l}^1} \times \prod_{\substack{i=1, \\ i \notin \mathcal{I}(\sigma, p)}}^p \|c^i\|_{l^2} \\ &\leq \prod_{i=1}^p \left(\|c^i\|_{\tilde{l}^1} + \|c^i\|_{l^2} \right). \end{aligned}$$

Preuve. La seconde inégalité est triviale à partir de la première. On démontre cette dernière par récurrence sur p . Les cas $p=1$, $p=2$ et $p=3$ sont clairs. Soit $p \geq 4$ et supposons le résultat établi pour $q \in \{1, \dots, p-1\}$.

-Cas $\mathcal{I}(\sigma, p) \neq \emptyset$.

Si $p \in \mathcal{I}(\sigma, p)$ alors il existe une permutation $\sigma' = \sigma|_{\{1, \dots, 2(p-1)\}} \in \mathcal{A}_{2(p-1)}$ telle que

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| = \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2(p-1)}, \\ n_{\sigma'(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-3}, n_{2p-2}}^{p-1}| \right) \times \|c^p\|_{\tilde{l}^1}.$$

et le résultat est prouvé par récurrence en remarquant que $\mathcal{I}(\sigma', p-1) = \mathcal{I}(\sigma, p) \setminus \{p\}$.

Sinon $p \notin \mathcal{I}(\sigma, p)$ et il existe un entier $i \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que $i \in \mathcal{I}(\sigma, p)$.

Dans cette situation, posons

$$\begin{aligned} \gamma : \{1, \dots, 2p\} \setminus \{2i-1, 2i\} &\rightarrow \{1, \dots, 2p-2\} \\ k &\mapsto k \quad \text{si } k \notin \{2p-1, 2p\}, \\ 2p-1 &\mapsto 2i-1, \\ 2p &\mapsto 2i, \end{aligned}$$

$\tau = \sigma|_{\{1, \dots, 2p\} \setminus \{2i-1, 2i\}}$ et $\sigma' = \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ pour obtenir que

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| \\ &= \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2(p-1)}, \\ n_{\sigma'(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-3}, n_{2p-2}}^{p-1}| |c_{n_{2i-1}, n_{2i}}^p| \right) \times \|c^i\|_{\tilde{l}^1}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\sigma' \in \mathcal{A}_{2(p-1)}$ et que $\mathcal{I}(\sigma', p-1) = \mathcal{I}(\sigma, p) \setminus \{i\}$. Ainsi, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $c^1 = c^1, \dots, c^i = c^p, \dots, c^{p-1} = c^{p-1}$ et le résultat suit.

Cas $\mathcal{I}(\sigma, p) = \emptyset$:

Nous devons prouver que

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| \leq \prod_{i=1}^p \|c^i\|_{l^2}.$$

Ainsi, on remarque que le rôle des c^i est symétriques et qu'il est donc possible d'intervertir leurs positions. Par conséquent, il est possible de supposer que $\sigma(2p) = 2p-2$ et $\sigma(2p-1) = 2p-3$ ou $2p-4$.

Sous-cas $\sigma(2p) = 2p-2$ et $\sigma(2p-1) = 2p-3$:

Il existe une permutation $\sigma' = \sigma|_{\{1, \dots, 2(p-2)\}} \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$ telle que

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| = \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2(p-2)}, \\ n_{\sigma'(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-3}, n_{2p-2}}^{p-2}| \right) \times \sum_{n, k} c_{n, k}^{p-1} c_{n, k}^p.$$

Puis, il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse de récurrence pour prouver le résultat.

Sous-cas $\sigma(2p) = 2p - 2$ et $\sigma(2p - 1) = 2p - 4$:

Posons $\tau = \sigma|_{\{1, \dots, 2p-5\} \cup \{2p-3\}}$,

$$\begin{aligned} \gamma : \{1, \dots, 2(p-2)\} &\rightarrow \{1, \dots, 2p-5\} \cup \{2p-3\} \\ k &\mapsto k \text{ si } k \in \{1, \dots, 2p-5\}, \\ 2p-4 &\mapsto 2p-3, \end{aligned}$$

et $\sigma' = \gamma^{-1} \circ \tau \circ \gamma \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$.

Comme $2p-4 = \sigma'(2p-4) \Leftrightarrow 2p-3 = \sigma(2p-3)$ et $\sigma' = \sigma$ sur $\{1, \dots, 2p-5\}$, alors

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2(p-2)}, \\ n_{\sigma'(i)} = n_i}} \sum_{n, m} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-5}, m}^{p-2}| |c_{n_{2p-4}, n}^{p-1}| |c_{m, n}^p|.$$

Puis, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{n, m} |c_{n_{2p-5}, m}^{p-2}| |c_{n_{2p-4}, n}^{p-1}| |c_{m, n}^p| \leq \sqrt{\sum_m |c_{n_{2p-5}, m}^{p-2}|^2 \cdot \sum_n |c_{n_{2p-4}, n}^{p-1}|^2} \times \|c^p\|_{l^2},$$

pour ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence à $p-2$, $\sigma' \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$ et $c^1 = c^1, \dots, c^{p-3} = c^{p-3}$ et

$$\tilde{c}_{k, l}^{p-2} = \sqrt{\sum_m |c_{k, m}^{p-2}|^2 \times \sum_n |c_{l, n}^{p-1}|^2}.$$

Il est important de remarquer qu'il n'est pas clair que $\mathcal{I}(\sigma', p-2) = \emptyset$ et qu'il est possible que $p-2 \in \mathcal{I}(\sigma', p-2)$. On obtient alors

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}^1| \dots |c_{n_{2p-1}, n_{2p}}^p| \leq \prod_{i=1}^{p-3} \|c^i\|_{l^2} \times \|\tilde{c}^{p-2}\|_{l_i^?} \times \|c^p\|_{l^2},$$

où $l_i^?$ désigne la norme l^2 ou \tilde{l}^1 .

Finalement, pour conclure, on note que

$$\|\tilde{c}^{p-2}\|_{l^2} = \left\| \sqrt{\sum_m |c_{k, m}^{p-2}|^2 \times \sum_n |c_{l, n}^{p-1}|^2} \right\|_{l^2} = \|c^{p-2}\|_{l^2} \times \|c^{p-1}\|_{l^2},$$

et par l'inégalité de Cauchy Schwarz que

$$\|\tilde{c}^{p-2}\|_{\tilde{l}^1} = \left\| \sqrt{\sum_m |c_{k, m}^{p-2}|^2 \cdot \sum_n |c_{l, n}^{p-1}|^2} \right\|_{\tilde{l}^1} \leq \|c^{p-2}\|_{l^2} \times \|c^{p-1}\|_{l^2}.$$

Ce qui achève la récurrence. \square

Maintenant, grâce aux lemmes 75, 76 et 78, on peut démontrer les estimées de chaos de Wiener qui nous serviront à estimer $P(\Omega_t^c)$.

Proposition 79 *Supposons que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 2$ et $(c_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$, $(c_{n,m})_{n,m} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $(c_{n,m,k})_{n,m,k} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$,*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \times g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2}, \quad (30)$$

$$\left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + L \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right), \quad (31)$$

$$\left\| \sum_{n,m,k \in \mathbb{N}} c_{n,m,k} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times g_k(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{3}{2}} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m,k \in \mathbb{N}} |c_{n,m,k}|^2} + \right. \quad (32)$$

$$\left. + L \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{n,n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{n,m,n}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{m,n,n}|^2} \right) \right),$$

où

$$L = \begin{cases} 0 & \text{dans le cas Gaussien complexe,} \\ 1 & \text{dans le cas Bernoulli (ou Gaussien réel).} \end{cases}$$

Preuve.

1- Dans [BT2], il est montré que si

$$\exists \delta > 0 / \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}, E(e^{\alpha g_n}) \leq e^{\delta \alpha^2}, \quad (33)$$

alors (30) est satisfait. Ainsi, (30) est vérifiée puisque (33) est satisfait si $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

2- Pour le cas Gaussien, d'après [TT], proposition 2.4 (Wiener chaos estimates), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 2$,

$$\left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q \times \left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (34)$$

Or

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{n,n',m,m' \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E \left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega)} \times \overline{g_{m'}(\omega)} \right) \\ &\leq \sum_{n=n'=m=m' \in \mathbb{N}} || + \sum_{n=n',m=m' \in \mathbb{N}} || + \sum_{n=m,n'=m' \in \mathbb{N}} || + \sum_{n=m',n'=m \in \mathbb{N}} ||. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=n'=m=m' \in \mathbb{N}} \left| c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E \left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega) \times g_{m'}(\omega)} \right) \right| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}|^2 E(|g_n(\omega)|^4) \\
&\leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2,
\end{aligned}$$

et en utilisant que $E(g_n(\omega)^2) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=m, n'=m' \in \mathbb{N}} \left| c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E \left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega) \times g_{m'}(\omega)} \right) \right| \\
&= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \times |c_{m,m}| \times \left| E \left(g_n(\omega)^2 \times \overline{g_m(\omega)^2} \right) \right| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}|^2 \times E(|g_n(\omega)|^4) \\
&\leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi (31) est démontrée dans le cas $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Nous pouvons procéder de la même manière pour obtenir (32) puisque l'inégalité (34) est vraie pour un produit quelconque de variables aléatoires.

3- Dans le cas Bernoulli, démontrons (31). Nous pouvons limiter la preuve au cas où $q = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit alors de montrer que

$$\left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \leq (Cp)^{2p} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right)^{2p}.$$

Nous pouvons utiliser successivement les lemmes 75, 78 et 76 pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \\
&= \sum_{n_1, \dots, n_{4p}} c_{n_1, n_2} \dots c_{n_{2p-1}, n_{2p}} \overline{c_{n_{2p+1}, n_{2p+2}}} \dots \overline{c_{n_{4p-1}, n_{4p}}} \times E \left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i} \right) \\
&\leq \sum_{n_1, \dots, n_{4p}} |c_{n_1, n_2}| \dots |c_{n_{4p-1}, n_{4p}}| \times \left| E \left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{4p}} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{4p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1, n_2}| \dots |c_{n_{4p-1}, n_{4p}}| \\
&\leq \text{Card}(\mathcal{A}_{4p}) \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right)^{2p} \\
&\leq (Cp)^{2p} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre (31). Pour obtenir (32), on peut remarquer que le lemme 78 reste vrai pour un produit de 3 variables aléatoires (il suffit de faire la preuve avec des suites de 3 variables). \square

Preuve du théorème 73.

$$\begin{aligned}
P(\Omega_i^c) &\leq P \left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \geq t \right) \\
&+ P \left(\omega \in \Omega / \| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^2 \right) \\
&+ P \left(\omega \in \Omega / \| [e^{itH} u_0^\omega]^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^3 \right) \\
&+ P \left(\bigcup_N \left\{ \omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6} \right\} \right) \\
&+ P \left(\bigcup_N \left\{ \omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{s-1/4} \right\} \right)
\end{aligned}$$

ainsi il suffit d'établir la majoration (29) pour chacun des termes. Effectuons la démonstration pour le second et le quatrième terme (pour les autres termes, la démarche est identique).

I/ Cas $\| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^2$:

Comme $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sigma]$, il suffit d'obtenir le lemme suivant :

Lemma 80 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe 2 constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,*

$$P \left(\omega \in \Omega / \| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2 \right) \leq C e^{-\frac{ct^2}{\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}}.$$

Preuve du lemme 80. Remarquons qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour $t \geq C \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$. Grâce aux inégalités de Markov et Minkowski, on obtient pour $q \geq 4$,

$$\begin{aligned}
& P \left(\omega \in \Omega / \left\| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2 \right) \\
& \leq P \left(\omega \in \Omega / \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))}^q \geq t^{2q} \right) \\
& \leq t^{-2q} \times E_\omega \left(\left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))}^q \right) \\
& \leq t^{-2q} \times \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^q(\Omega, L^4([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3)))}^q \\
& \leq t^{-2q} \times \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^q([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3, L^q(\Omega)))}^q.
\end{aligned}$$

Puis, par (31), on établit

$$\begin{aligned}
& \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^q(\Omega)} \\
& \leq \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \left[\sum_{n,m \in \mathbb{N}} e^{it(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)} c_n c_m h_n(x) h_m(x) g_n(\omega) g_m(\omega) \right] \right\|_{L^q(\Omega)} \\
& \leq \left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} e^{it(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)} c_n c_m \times H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n(x) h_m(x)] \times g_n(\omega) g_m(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \\
& \leq C \times q \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_n|^2 |c_m|^2 \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n(x) h_m(x)] \right\|^2} \right. \\
& \quad \left. + L \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n^2(x)] \right\| \right).
\end{aligned}$$

Prenons $L = 0$ pour simplifier les calculs (le terme avec $L=1$ s'estime de la même façon). Par l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned}
& P \left(\omega \in \Omega / \left\| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2 \right) \\
& \leq \left(\frac{Cq}{t^2} \right)^q \times \left\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n(x) h_m(x)] \right\|^2 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi], L^1(\mathbb{R}^3))}^{q/2} \\
& \leq \left(\frac{Cq}{t^2} \right)^q \times \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times \left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n(x) h_m(x)] \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \right)^{q/2}.
\end{aligned}$$

Puis grâce à la proposition 27 avec $\delta = \epsilon$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\left\| H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} [h_n(x) h_m(x)] \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^2(\mathbb{R}^3))}^2 & \leq C_\epsilon \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{2(\sigma-\epsilon)} \\
& \leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{2\sigma}.
\end{aligned}$$

Et finalement, on a

$$\begin{aligned}
& P\left(\omega \in \Omega / \left\| [e^{itH} u_0^\omega]^2 \right\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right) \\
& \leq \left(\frac{Cq}{t^2}\right)^q \times \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{2\sigma}\right)^{q/2} \\
& \leq \left(\frac{Cq \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}{t^2}\right)^q.
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de choisir $q = \frac{t^2}{2C \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2} \geq 4$ puisque $t \gg 1$ pour conclure. \square

II/ Cas $\|\Delta_N[e^{itH} u_0^\omega]\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq N^{-1/6}t$: Commençons par établir le lemme suivant :

Lemma 81 *Pour tout $p_1, p_2 \in [2, \infty[$ et $\epsilon > 0$, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{\|\Delta_N(u_0)\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}^2}}.$$

Preuve du lemme 81 Quitte à remplacer u_0 par $\Delta_N(u_0)$, on se ramène à démontrer que

$$P\left(\omega \in \Omega / \|\Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{\|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}^2}}.$$

Comme pour le lemme 80, il suffit de prouver l'estimation pour $t \geq C \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}$.

Grâce aux inégalités de Markov et Minkowski, on obtient pour $q \geq p_1, p_2$,

$$\begin{aligned}
& P\left(\omega \in \Omega / \|\Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \\
& \leq \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon} \times E_\omega(\|\Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3))})}{t}\right)^q \\
& \leq \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon}}{t}\right)^q \times \|H^{\epsilon/2} \Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^q(\Omega), L^{p_1}([-2\pi, 2\pi]), L^{p_2}(\mathbb{R}^3)}^q \\
& \leq \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon}}{t}\right)^q \times \|H^{\epsilon/2} \Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi]), L^{p_2}(\mathbb{R}^3), L^q(\Omega)}^q.
\end{aligned}$$

Or, d'après (30),

$$\begin{aligned}
\|H^{\epsilon/2} \Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^q(\Omega)} & \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \lambda_n^\epsilon e^{it\lambda_n^2} c_n h_n(x) g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \\
& \leq \left\| \sum_{\lambda_n \sim N} \phi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \lambda_n^\epsilon e^{it\lambda_n^2} c_n h_n(x) g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times \sqrt{\sum_{\lambda_n \sim N} \phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \lambda_n^{2\epsilon} \times |c_n|^2 \times |h_n(x)|^2}.
\end{aligned}$$

Alors, par (5) et (6), on trouve

$$\begin{aligned}
& \|H^{\epsilon/2} \Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi]), L^{p_2}(\mathbb{R}^3), L^q(\Omega)} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times \left\| \sum_{\lambda_n \sim N} \phi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) \times \lambda_n^{2\epsilon} \times |c_n|^2 \times |h_n(x)|^2 \right\|_{L^{p_1/2}([-2\pi, 2\pi]), L^{p_2/2}(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times \sqrt{\sum_{\lambda_n \sim N} \phi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) \times \lambda_n^{2\epsilon} \times |c_n|^2 \times \|h_n(x)\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^3)}^2} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times \sqrt{\sum_{\lambda_n \sim N} \phi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) \times \lambda_n^{2\epsilon-1/3} \times |c_n|^2} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon} \times \sqrt{\sum_{\lambda_n \sim N} \phi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) \times \lambda_n^{2(\sigma-\epsilon)} \times |c_n|^2} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon} \times \|\Delta'_N(u_0)\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)} \\
& \leq C \times \sqrt{q} \times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon} \times \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a pour tout $q \geq p_1, p_2$,

$$\begin{aligned}
P \left(\omega \in \Omega / \|\Delta'_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq t N^{-1/6-\sigma+2\epsilon} \right) \\
\leq \left(\frac{C \times \sqrt{q} \times \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}}{t} \right)^q.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $q = \left(\frac{t}{4C\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}} \right)^2 \geq p_1, p_2$ pour prouver le lemme 81. \square

Ensuite, pour $p_2 = \frac{3}{\epsilon} + \epsilon$, on a

$$W^{\epsilon, p_2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi pour tout $p_1 \in [2, \infty[$ et $\epsilon > 0$, il existe deux constantes C, c telles que pour tout $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)$

$$P \left(\omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^{p_1}([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq t N^{-1/6-\sigma+2\epsilon} \right) \leq C e^{-\frac{c t^2}{\|\Delta_N(u_0)\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}^2}}$$

Ensuite, nous pouvons choisir $p_1 = 4$ et utiliser que $\|\Delta_N(u_0)\|_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}^2 \leq N^{-2\epsilon} \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2$ pour obtenir pour tout $\epsilon > 0$ l'existence de deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,

$$P \left(\omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq t N^{-1/6} \right) \leq C e^{-\frac{c N^{2(\sigma-\epsilon)} t^2}{\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}}. \quad (35)$$

Nous devons prouver qu'il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,

$$P \left(\bigcup_N \left\{ \omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH} u_0^\omega)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq t N^{-1/6} \right\} \right) \leq C e^{-\frac{c t^2}{\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}}. \quad (36)$$

Depuis

$$P\left(\bigcup_N \left\{ \omega \in \Omega / \|\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6} \right\}\right) \leq 1,$$

il suffit de montrer (36) pour $t \geq C\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$.

On pose $\alpha = \left(\frac{t}{C\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}\right)^2$ et en choisissant $\epsilon < \sigma$ dans (35), il suffit de montrer que

$$\forall \delta > 0, \exists C, c > 0 / \forall \alpha \geq 1, \sum_N e^{-\alpha N^\delta} \leq Ce^{-c\alpha}. \quad (37)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_N e^{-\alpha N^\delta} &= \sum_{k \geq 1} e^{-\alpha(2^{k-1})^\delta} \leq \int_0^\infty e^{-\alpha(2^{x-1})^\delta} dx \leq \int_{1/2}^\infty \frac{e^{-\alpha y^\delta}}{y} dy \\ &\leq \int_{(1/2)^\delta}^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{z} \frac{dz}{\delta} \leq \int_{\alpha(1/2)^\delta}^\infty \frac{e^{-t}}{t} \frac{dt}{\delta} \leq \frac{2^\delta}{\delta \alpha} e^{-\frac{\alpha}{2^\delta}} \leq Ce^{-c\alpha}, \end{aligned}$$

et (36) est prouvé ainsi que l'estimation du terme dans le cas **II**.

8. Preuves des théorèmes

8.1. Preuve du théorème 4

Pour montrer le théorème 4, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$, $P(\Omega_t) > 0$. Pour cela, on commence par établir qu'il suffit de montrer le résultat pour un nombre fini de termes dans la donnée initiale. On commence par introduire la définition suivante :

Définition 82 Pour $u_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n h_n(x)$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}^3)$, on définit pour $K \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} [u_0]_K &= \sum_{\lambda_n < K} c_n h_n(x), \\ [u_0]^K &= \sum_{\lambda_n \geq K} c_n h_n(x). \end{aligned}$$

Pour ensuite énoncer le théorème.

Theorem 83 Pour tout $t > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$, il existe un entier $K \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} P(\Omega_t) &\geq (1 - \alpha) \times \\ &\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / \|[u_0]_K\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \|(e^{itH}[u_0]_K)^2\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2}, \right. \\ &\quad \left. \|(e^{itH}[u_0]_K)^3\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \right. \\ &\quad \left. \bigcap_N \left\{ \|\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)\|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \bigcap_N \left\{ \|\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)\|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \right). \end{aligned}$$

Preuve. Par indépendance, on trouve

$$\begin{aligned}
P(\Omega_t) \geq & \mu \left(\| [u_0]^K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \| (e^{itH}[u_0]^K)^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2}, \right. \\
& \| (e^{itH}[u_0]^K)^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \\
& \bigcap_N \left\{ \| \Delta_N(e^{itH}[u_0]^K) \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\}, \\
& \bigcap_N \left\{ \| \Delta_N(e^{itH}[u_0]^K) \|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \Bigg) \\
& \times \mu \left(\| [u_0]_K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \| (e^{itH}[u_0]_K)^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2}, \right. \\
& \| (e^{itH}[u_0]_K)^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \\
& \bigcap_N \left\{ \| \Delta_N(e^{itH}[u_0]_K) \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\}, \\
& \bigcap_N \left\{ \| \Delta_N(e^{itH}[u_0]_K) \|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \Bigg).
\end{aligned}$$

Notons par $P_{t,K}$ le premier terme probabiliste de cette inégalité. Alors par le théorème 73, pour tout $t \geq 0$ et $K \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{t,K} \geq 1 - Ce^{-\frac{ct^2}{\| [u_0]^K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}},$$

avec

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \| [u_0]^K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2 = 0.$$

Par conséquent, il existe bien un entier non nul K tel que $Ce^{-\frac{ct^2}{\| [u_0]^K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}} \leq \alpha$. \square

Remarque : Dans ce théorème, s'il existe $\sigma' > \sigma$ avec $u_0 \in \overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)$ alors nous pouvons choisir

$$M \geq \| u_0 \|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \times \sqrt{\frac{\log(\frac{C}{\alpha})}{c}} \text{ pour avoir } P_{MK-(\sigma'-\sigma),K} \geq 1 - \alpha.$$

Puis, nous pouvons choisir $K \geq \left(\frac{M}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma'-\sigma}}$ pour obtenir

$$P_{t,K} \geq P_{MK-(\sigma'-\sigma),K} \geq 1 - \alpha.$$

Et finalement $K = \left(\frac{\| u_0 \|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}{t} \times \sqrt{\frac{\log(\frac{C}{\alpha})}{c}}\right)^{\frac{1}{\sigma'-\sigma}}$ satisfait le théorème 83.

Enfin, on démontre le résultat pour un nombre fini de termes dans la donnée initiale.

Proposition 84 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $K \in \mathbb{N}$,*

$$\left\{ \omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_\lambda(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{4} \right\} \subset \left\{ \omega \in \Omega / \| [u_0^\omega]_K \|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2} \right\}, \quad (38)$$

$$\left\{ \omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6} \right\} \subset A$$

où

$$A = \bigcap \left\{ \omega \in \Omega / \| (e^{itH}[u_0^\omega]_K)^2 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2} \right\}, \quad (39)$$

$$\bigcap \left\{ \omega \in \Omega / \| (e^{itH}[u_0^\omega]_K)^3 \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2} \right\}, \quad (40)$$

$$\bigcap_N \left\{ \omega \in \Omega / \| \Delta_N(e^{itH}[u_0^\omega]_K) \|_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t}{2} N^{-1/6} \right\}, \quad (41)$$

$$\bigcap_N \left\{ \omega \in \Omega / \| \Delta_N(e^{itH}[u_0^\omega]_K) \|_{L^R([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t}{2} N^{s-1/4} \right\}. \quad (42)$$

Preuve. On remarque qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 n^{\frac{1}{3}} \leq \lambda_n^2 \leq C_2 n^{\frac{1}{3}}$ puis que $|\{\lambda_n \leq K\}| \leq CK^6$. Le résultat suit alors grâce à la proposition 25 et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

Preuve du théorème 4. Par le théorème 83 et la proposition 84, il suffit de montrer que pour tout entier $K \geq 1$ et réel $t > 0$,

$$P \left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6} \right) > 0.$$

Mais, par indépendance,

$$\begin{aligned} & P \left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6} \right) \\ & \geq P \left(\bigcap_{\lambda_n \leq K} \left\{ \omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^{12} \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2} \right\} \right) \\ & \geq \prod_{\lambda_n \leq K} P \left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^{12} \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2} \right) > 0, \end{aligned}$$

car pour tout $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq R) > 0$. \square

Remarque : Dans le cas Gaussien, comme

$$P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq R) = 1 - e^{-R},$$

on en déduit

$$P \left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^2} \right) \geq \left(1 - e^{-\frac{t^2}{CK^{12} \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}} \right)^{K^6}.$$

Par conséquent, pour $\sigma' > \sigma$, en utilisant la remarque du théorème 83, on obtient qu'il existe deux constantes $R > 0$ et $C > 0$ telles que si $\|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \geq R$ alors

$$P(\Omega') \geq (1 - \alpha) \times e^{-C\|u_0\|^{\frac{6}{\sigma'-\sigma}}_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \log \|u_0\|_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}.$$

8.2. Preuve du théorème 5

En utilisant les théorèmes 68, 69 et 71, pour prouver (3), il suffit d'établir que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P\left(\omega \in \Omega_\lambda \mid \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta\right) = 1. \quad (43)$$

En adaptant la preuve de l'appendice A.2 de [BT4], on peut obtenir que

$$P\left(\omega \in \Omega_\lambda^c \mid \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta\right) \leq C e^{-c \frac{\lambda^2}{\eta^2}},$$

et (3) est prouvé.

Ensuite, pour obtenir (4), il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \left(u_0^1 \in E_0(\lambda), u_0^2 \in E_0(\lambda), \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_{X^0} \leq \epsilon \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta, \|u_0^2\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 1.$$

En utilisant le théorème 72, il suffit de démontrer que pour tout $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \left(u_0^1 \in E_0(\lambda), u_0^2 \in E_0(\lambda) \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta, \|u_0^2\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 1.$$

Ainsi, il suffit d'établir que pour tout $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \left(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta, \|u_0^2\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \left(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta, \|u_0^2\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_1 \left(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c \mid \|u_0^1\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta \right) = 0, \end{aligned}$$

et (4) est démontré.

8.3. Preuve du théorème 6

Pour prouver le théorème 6, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $P(\Omega_t^\epsilon) \geq 1 - \alpha$. Ce résultat est clair en vu du théorème 73 puisque

$$P(\Omega_t^\epsilon) \geq 1 - C_1 e^{-\frac{C_2}{\epsilon^2 \|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2}} \geq 1 - \alpha \text{ si } \epsilon \ll 1.$$

9. Généralisation du résultat

Dans cette partie, on suppose la dimension d'espace $d \geq 2$ et on donne une généralisation du théorème 4. Si l'on suppose que la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est identiquement distribuée de mêmes lois gaussiennes complexes standards et que p est un entier impair dans l'équation (NLS), on peut alors établir le théorème suivant :

Theorem 85 Soient $\sigma \in [\frac{d-1}{2} - \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}[$, $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ et $s \in [\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \sigma + \frac{1}{2}[$ alors il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $P(\Omega') > 0$,
- ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale \tilde{u} à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$.
- iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta}L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta}L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= 0. \end{aligned}$$

Les points clefs de la démonstration du théorème 4 sont l'existence de l'estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique et la transformation de lentille, propriétés vraies en dimension quelconque plus grande que 2. Rappelons que les inégalités du chaos de Wiener pour les variables aléatoires gaussiennes sont établies pour une n -linéarité quelconque dans [TT]. Ainsi, dans la preuve du théorème 4, le fait que $p = 3$ intervient surtout dans l'application du théorème de point fixe de Picard. Vu que les arguments de bases restent vrais en dimension $d \geq 2$, ce dernier reste applicable pour p quelconque impair à condition de vérifier que $u_0(\omega, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))$ ω presque sûrement (si on utilise deux fois l'estimée bilinéaire, les termes restants sont à évaluer dans L_t^∞ , mais pour $p=3$, il n'y a pas de termes restants), ce que nous expliquons ici. On peut montrer que

$$e^{itH}u_0(\omega, \cdot) \in L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}+\sigma-, \infty}(\mathbb{R}^d)) \text{ } \omega \text{ presque sûrement.}$$

Grâce à l'inégalité de Minkowsky et les injections de Sobolev, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|e^{itH}u_0\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], L^p(\mathbb{R}^d))} &\leq \|e^{itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d, L^\infty([-2\pi, 2\pi]))} \\ &\leq C\|e^{itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d, W^{1/p+\epsilon, p}([-2\pi, 2\pi]))} \\ &\leq C\|H^{1/p+\epsilon}e^{itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d, L^p([-2\pi, 2\pi]))}. \end{aligned}$$

Puis nous pouvons remplacer u_0 par $H^{\frac{\sigma}{2}}u_0$ pour obtenir que

$$\begin{aligned} \|e^{itH}u_0\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s, p}(\mathbb{R}^d))} &\leq C\|H^{\frac{\sigma}{2}+1/p+\epsilon}e^{itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d, L^p([-2\pi, 2\pi]))} \\ &\leq C\|H^{\frac{\sigma}{2}+1/p+\epsilon}e^{itH}u_0\|_{L^p([-2\pi, 2\pi], L^p(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C\|e^{itH}u_0\|_{L^p([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{s+2/p+2\epsilon, p}(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\epsilon > \frac{d}{p}$ alors

$$\begin{aligned} \|e^{itH}u_0\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\sigma+1/6-4\epsilon, \infty}(\mathbb{R}^d))} &\leq C\|e^{itH}u_0\|_{L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\sigma+1/6-3\epsilon, p}(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C\|e^{itH}u_0\|_{L^p([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\sigma+1/6, p}(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Références

- [Bou1] Jean-Marc Bouclet. *Distributions spectrales pour des opérateurs perturbés*. PhD thesis, Nantes university, 2000.
- [Bou2] Jean Bourgain. *Global solutions of non linear Schrödinger equations*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 46.
- [Bou3] Jean Bourgain. On nonlinear schrödinger equations. *Inst. Hautes Études Sci.*, pages 11–21, 1998.
- [BGT1] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Strichartz inequalities and the non linear schrödinger equation on compact manifolds. *American Journal of Mathematics*, 126(3) :569–605, Juin 2004.
- [BGT2] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear schrödinger equation on surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 159(1) :187–223, 2005.
- [BGT3] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear schrödinger equations. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure*, 38(2) :255 – 301, 2005.
- [BT1] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Invariant measure for a three dimensional nonlinear wave equation. *International Mathematics Research Notices*, 22, 2007.
- [BT2] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data cauchy theory for supercritical wave equations i : local theory. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :449–475, 2008.
- [BT3] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data cauchy theory for supercritical wave equations ii : a global existence result. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :477–496, 2008.
- [BT4] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/57/52/01/PDF/hadamard.pdf>, 2011.
- [BTT] Nicolas Burq, Nikolay Tzvetkov, and Laurent Thomann. Long time dynamics for the one dimensional non linear schrödinger equation. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/45/86/10/PDF/osc-harmonique.pdf>, 2010.
- [CCT] Michael Christ, James Colliander, and Terence Tao. Ill-posedness for nonlinear schrödinger and wave equations. In <http://arxiv.org/pdf/math/0311048v1.pdf>, 2003.
- [CG1] Jean-Yves Chemin and Isabelle Gallagher. Wellposedness and stability results for the navier-stokes equations in \mathbb{R}^3 . *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 26(2) :599 – 624, 2009.
- [CG2] Jean-Yves Chemin and Isabelle Gallagher. Large, global solutions to the navier-stokes equations, slowly varying in one direction. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(6) :2859 – 2873, 2010.
- [CGP] Jean-Yves Chemin, Isabelle Gallagher, and Marius Paicu. Global regularity for some classes of large solutions to the navier-stokes equations. *Annals of Mathematics*, 173(2) :983 – 1012, 2011.
- [CO1] James Colliander and Tadahiro Oh. Almost sure global solutions of the cubic nonlinear schrödinger equation below l^2 . In <http://arxiv.org/pdf/math/0311048v1.pdf>.
- [CO2] James Colliander and Tadahiro Oh. Almost sure local well-posedness of the cubic nonlinear schrödinger equation below l^2 . In <http://arxiv.org/pdf/math/0311048v1.pdf>.
- [D] Yu Deng. Two dimensional nls equation with random radial data. In <http://arxiv.org/pdf/1008.2657v2.pdf>, 2010.
- [DG] Jacek Dziubanski and Pawel Glowacki. Sobolev spaces related to schrödinger operators with polynomial potentials. *Mathematische Zeitschrift*, 262 :881–894, 2009.
- [G] Jean Ginibre. Le problème de cauchy pour des edp semi-linéaires périodiques en variables d'espace. *Séminaire Bourbaki*, 796 :163–187, 1995.
- [H] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operator III*. Springer Verlag, 1985.
- [KT] Herbert Koch and Daniel Tataru. l^p eigenfunction bounds for the hermite operator. *Duke Math. J.*, 128(2) :369 – 392, 2005.
- [M] Andre Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Springer.
- [QL] Hervé Queffélec and Daniel Li. *Introduction à l'étude des espaces de Banach*. Edp Sciences, 2005.

- [R] Daniel Robert. *Autour de l'approximation semi classique*. Progress in mathematics, Birkhäuser, 1987.
- [S] Gigliola Staffilani. The theory of nonlinear schrödinger equations : part1.
- [Ta1] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations : local and global analysis*. American Mathematical Society, 2006.
- [Ta2] Terence Tao. A pseudoconformal compactification of the nonlinear schrödinger equation and applications. *New York Journal of Mathematics*, 15 :265–282, 2009.
- [Th] Laurent Thomann. Random data cauchy problem for supercritical schrödinger equations. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 26(6) :2385 – 2402, 2009.
- [TT] Laurent Thomann and Nikolay Tzvetkov. Gibbs measure for the periodic derivative non linear schrödinger equation. *Nonlinearity*, 23 :2771–2791, 2010.